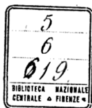
TRAITÉ THÉORIQUE ET EXPERIMENTAL D'HYDRODYNAMIQUE. PAR...

Charles Bossut





TRAITÉ
THÉORIQUE ET EXPÉRIMENTAL
D'HYDRODYNAMIQUE.

Par Charles Bossut, *Membre de l'Institut National des Sciences et des Arts, Examinateur des Elèves du Corps Militaire du Génie, etc.*

NOUVELLE ÉDITION,

Corrigée et considérablement augmentée.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez Laran, Libraire, au Palais Egalité, galerie du côté de la rue des Bons-Enfans, N°. 181.

L'AN IV DE LA RÉPUBLIQUE.



DISCOURS

PRÉLIMINAIRE.

Les anciens ont porté très-loin l'esprit d'invention dans la partie organique des machines. Le chariot que l'architecte Ctesiphon imagina pour transporter les colonnes du fameux temple d'Éphèse, offre un exemple remarquable de l'art avec lequel ils savoient mouvoir les plus lourds fardeaux, par une combinaison adroite de roues et de leviers. Un autre genre de mécanisme non moins ingénieux, est celui des *clepsydres* ou *horloges d'eau*, dont l'origine remonte aux Égyptiens. Ces horloges faisoient connoître l'heure par les élévations successives de l'eau qui entroit dans un vase, en quantités réglées sur les divisions du temps; ou par le mouvement d'une aiguille que cette eau faisoit tourner au moyen d'un petit engrenage. Les sabliers furent, dans la suite, substitués aux clepsydres.

Tous ces efforts de l'industrie humaine n'eurent, pendant plusieurs siècles, d'autres guides que l'expérience et le génie d'une mécanique naturelle. Sans remonter plus haut qu'au temps d'Aristote, on voit, par la manière dont ce philosophe explique les effets des machines les plus ordinaires, à quel degré la véritable théorie en étoit alors ignorée.

Archimède, qui n'a précédé Jésus-Christ que d'environ deux cent-cinquante ans, est le premier qui ait découvert le principe scientifique de l'équilibre du levier: principe auquel on peut rapporter tout le fond de la statique élémentaire. Nous n'avons rien de lui sur les loix du mouvement. Cependant la théorie du mouvement uniforme n'avoit même alors aucune difficulté; mais celle des mouvemens variés en général demandoit une géométrie plus profonde, dont la découverte et les usages sont entièrement dûs aux modernes.

Si la mécanique des corps solides a été si lente à se former, on sent que l'Hydrodynamique a dû l'être encore davantage. Car, en supposant même qu'on fût parvenu à déterminer géométriquement les conditions de l'équilibre et du mouvement pour un système quelconque de corps solides, la même méthode n'auroit pu être appliquée directement à une masse fluide, dont on ne connoît les élémens, ni pour le nombre, ni pour la figure, ni pour la grosseur. Il falloit donc que l'expérience, ou une propriété particulière aux fluides, vînt d'abord former, pour ainsi dire, le pont de communication d'une science à l'autre. Alors les bases fondamentales de l'Hydrodynamique étant une fois posées, les problèmes qui en dépendent se résolvent par la géométrie et le calcul, comme ceux de la mécanique ordinaire. Cette manière de traiter l'Hydrodynamique, mène nécessairement aux formules les plus simples qu'on puisse espérer. Toute autre méthode,

plus générale et plus directe en apparence, produiroit des expressions compliquées, qu'on ne pourroit intégrer qu'en les restreignant par des suppositions, souvent précaires et capables de leur enlever l'avantage de représenter les phénomènes de la nature avec une précision suffisante.

Archimède, à qui l'on doit encore les élémens de l'Hydrostatique, a fondé cette science dans son livre *De humido insidentibus*, sur ce principe simple, fécond et confirmé par l'expérience : qu'un point quelconque d'une masse fluide en équilibre est également pressé en toutes sortes de sens; il examine en conséquence les conditions qui doivent avoir lieu pour qu'un corps solide, flottant sur un fluide, prenne et conserve la situation d'équilibre; il applique ensuite au triangle, au cône et au paraboloïde, cette théorie générale, l'un des plus beaux monumens de son génie. Quant à l'Hydraulique, le tems de sa naissance étoit encore fort éloigné.

Deux mathématiciens de l'école d'Alexandrie, Ctesibius et Heron son disciple, environ un siècle après Archimède, inventèrent quelques machines Hydrauliques très-ingénieuses, dont le jeu dépendoit du ressort ou du poids de l'air, mis en activité : telles sont les *pompes* qui font servir l'air de véhicule à l'action de la force motrice, et la *Fontaine de compression*, appellée encore aujourd'hui *Fontaine de Heron*, dans laquelle l'eau s'élève au-dessus de son niveau en vertu de la pression de l'air qu'on y a d'abord condensé : tel est encore le *syphon*

recourbé, à branches inégales, où l'eau monte par la plus courte, lorsqu'on y a fait le vuide, et s'écoule par la plus longue. En admirant le génie qui a inventé ces machines, on éprouve un sentiment pénible, lorsqu'on voit leurs auteurs attribuer l'ascension de l'eau à une prétendue horreur de la nature pour le vuide.

Les anciens nous ont transmis plusieurs autres machines Hydrauliques : nous leur devons, par exemple, la *limace* ou *vis d'Archimède*, le *tympan*, les moulins à eau et les chaînes à godets. Une épigramme de l'anthologie grecque a donné lieu de croire que les moulins à eau ont été inventés seulement au tems d'Auguste; mais Vitruve qui florissoit sous ce prince, ne dit point, dans la description qu'il en donne, qu'ils fussent alors une découverte récente : vraisemblablement ils étoient connus bien auparavant. Les moulins à vent sont venus beaucoup plus tard. Quelques auteurs prétendent que les François les ont trouvés dès le sixième siècle; d'autres assurent que les croisades nous les ont apportés de l'Orient, où ils étoient déjà très-anciens, et où on les préfère aux moulins à eau, parce que les sources et les rivières sont plus rares dans ces pays qu'en Europe. Que nous les ayons inventés ou reçus, il est certain que l'usage ne s'en est établi parmi nous qu'avec assez de peine et de lenteur. Nous leur préférons à notre tour les moulins à eau, comme d'un service plus commode et d'un mouvement plus régulier. Sous leurs rois de la première race, les

François faisoient, à l'exemple des Romains, un grand usage des moulins à bras ou à manège; dans la suite, on les a presque entièrement abandonnés: en quoi on a eu d'autant plus de tort, qu'ils peuvent suppléer très-utilement au chômage des deux autres espèces de moulins, par les tems de fortes gelées, ou d'un air calme. Il existe un moyen bien facile et bien peu couteux d'entretenir, dans les grandes villes, un certain nombre de ces moulins domestiques: c'est d'y employer, pour forces mouvantes, les hommes vigoureux détenus dans les prisons. S'il étoit possible d'élever des doutes sur le succès, je les dissiperois, en citant l'exemple d'une semblable manœuvre, appliquée très-avantageusement depuis une vingtaine d'années à la machine qui élève l'eau du puits de Bicêtre.

Il y avoit un tems considérable qu'on faisoit servir l'action des fluides de principe moteur dans plusieurs machines, sans qu'on sût déterminer ses effets par la théorie. Les vices d'une machine fournissoient des leçons pour en construire une autre moins défectueuse; et à force de tâtonnemens on arrivoit par degrés à la perfection. On attribue à *Sextus-Julius Frontinus* (vulgairement nommé *Frontin*) les premières notions un peu distinctes qu'on ait eues sur les loix du mouvement des fluides. Inspecteur des fontaines publiques à Rome, sous les empereurs Nerva et Trajan, il a laissé à ce sujet un ouvrage intitulé: *De aquæ ductibus urbis Romæ commentarius*. Il y considère le mouvement des

eaux qui coulent dans des canaux, ou qui s'échappent, par des orifices, des vases où elles sont contenues ; il décrit d'abord les aqueducs de Rome, cite les noms de ceux qui les ont fait construire, et les époques de leurs constructions ; ensuite il fixe et compare ensemble les mesures ou *modules* dont on se servoit alors à Rome pour déterminer les dépenses des ajutages. De-là il passe aux moyens de distribuer les eaux d'un aqueduc ou d'une fontaine. Il fait des observations vraies sur ces différens objets ; par exemple, il a vu que le produit d'un ajutage ne doit pas seulement s'évaluer par la grandeur ou superficie de cet ajutage, et qu'il faut encore tenir compte de la hauteur du réservoir : considération très-simple, et cependant négligée par quelques Fontainiers modernes. Il a senti pareillement qu'un tuyau destiné à dériver en partie l'eau d'un aqueduc, doit avoir, selon les circonstances, une position plus ou moins oblique par rapport au cours du fluide, etc. Mais on ne trouve d'ailleurs aucune précision géométrique dans ses résultats ; il n'a point connu la vraie loi des vîtesses, relativement aux hauteurs des réservoirs.

Les Lettres et les Arts étoient déjà dans la décadence au temps de Frontin ; et bientôt l'Europe fut plongée dans la plus affreuse barbarie. Cette nuit profonde dura près de treize cents ans. La Poésie et l'Éloquence y jetèrent par intervalles quelques éclairs, trop foibles pour en dissiper l'obscurité. L'esprit humain ne sortit de cet engourdissement

qu'au siècle des Médicis. On vit alors la foule des arts agréables, encouragés et protégés par de simples particuliers, renaître en Italie, et y briller avec le même éclat qu'ils avoient eu autrefois dans les beaux jours de la Grèce et de Rome. Peu-à-peu ils pénétrèrent chez les peuples voisins. La Philosophie eut une marche plus tardive. Je parle sur-tout de cette branche qui, à l'aide du Calcul et de la Géométrie, se propose d'expliquer avec certitude et avec évidence les phénomènes de la Nature. Ennemie des ornemens, cherchant le vrai dans toute sa simplicité, elle avoit peu d'attraits pour des esprits trop sensibles peut-être aux charmes de la Poésie et de *la Peinture*, et accoutumés à ne cueillir, pour ainsi dire, que les fleurs de l'imagination.

Cependant le renouvellement des Sciences suivit par degrés celui des Lettres et des Arts. L'Italie eut encore la gloire des premiers succès dans cette espèce de régénération de l'entendement humain. Galilée, l'un des plus grands génies qu'elle ait produit, mérita d'être appelé le père de la Philosophie moderne. Il dut également ce titre à ses découvertes astronomiques, et à sa théorie de l'accélération des graves : il soupçonna la pesanteur de l'air; et ce soupçon communiqué à Toricelli, le plus illustre de ses disciples, fut comme un trait de lumière qui conduisit celui-ci à démontrer réellement la pesanteur de l'air, par une foule d'expériences très-ingénieuses, et à donner la véritable explication de

l'ascension du mercure dans le Baromètre, et de l'eau dans les pompes.

Le cours des eaux à la surface de la terre, attira l'attention de Castelli, autre disciple de Galilée. Dans un petit traité publié en 1628, Castelli explique quelques phénomènes du mouvement des eaux dans un canal naturel ou artificiel de figure quelconque; il établit que lorsque l'eau a pris une fois un état régulier et permanent, les vitesses aux différentes sections faites perpendiculairement à la direction du mouvement, sont en raison inverse des surfaces de ces sections: principe vrai et dont Castelli déduit plusieurs conséquences vraies; mais il se trompe ensuite dans la mesure absolue de la vitesse qu'il fait proportionnelle à la pente du canal ou à la hauteur de l'eau.

Toricelli, dont nous venons de parler, eut un succès plus heureux dans la recherche particulière qu'il fit de la vitesse des eaux à leur sortie d'un vase par un petit orifice. En considérant que l'eau d'un jet vertical s'élève presque à la hauteur du réservoir, il pensa qu'elle devoit avoir, au sortir de l'ajutage, une vitesse égale à celle que chaque molécule d'eau auroit acquise en tombant de cette hauteur: d'où il conclut, conformément à la théorie de son maître, qu'abstraction faite de la résistance des obstacles, les vitesses des écoulemens suivoient la raison sous-doublée des pressions. Cette idée fut confirmée par des expériences que Raphaël Magiotti fit dans ce temps-là sur les produits de différens

ajutages, sous différentes charges d'eau. Toricelli publia sa découverte, en 1643, à la suite d'un petit traité intitulé : *De motu gravium naturaliter accelerato.* Alors l'Hydraulique, dans cette partie relative aux écoulemens par de petits orifices, devint une véritable science, dont la pratique a retiré les avantages les plus importans. Mais dans les écoulemens par des orifices un peu grands par rapport aux sections horizontales du vase, la vitesse suit une loi beaucoup plus composée, que la géométrie, au temps de Toricelli, ne pouvoit découvrir.

Pascal, qui mourut en 1662, laissa dans ses papiers deux petits traités, l'un sur l'équilibre des liqueurs en général, l'autre sur le poids de la masse de l'air, lesquels furent imprimés l'année suivante. Dans le premier, l'auteur fonde l'équilibre des fluides sur ce principe général, que deux pistons appliqués à deux ouvertures d'un vase, sous une même profondeur d'eau, se font mutuellement équilibre, lorsque les forces qui les poussent sont proportionnelles aux superficies des ouvertures; il fait ensuite plusieurs applications très-intéressantes de ce principe. Le traité de la pesanteur de l'air contient les preuves expérimentales et théoriques qui ont fixé définitivement les opinions alors flottantes des Savans sur cette matière. Ces deux ouvrages, quoique fort courts, sont complets dans leur genre, et portent l'empreinte du vaste génie de l'auteur. Il n'a rien écrit sur le mouvement des fluides.

Parmi ceux qui ont traité ce dernier sujet, et qui

ont mis le Théorême de Toricelli en usage, Mariotte mérite d'être cité avec distinction. Né avec un talent rare pour imaginer et exécuter des expériences, ayant eu occasion d'en faire un grand nombre sur le mouvement des eaux à Versailles, à Chantilli et dans plusieurs autres endroits, il composa sur cette matière un traité qui ne fut imprimé qu'après sa mort, arrivée en 1686. Il s'y est trompé en quelques endroits; il n'a fait qu'effleurer plusieurs questions; il n'a pas connu l'effet de la contraction de la veine fluide au sortir d'un ajutage, etc. Malgré ces imperfections, son ouvrage a été fort utile et a beaucoup contribué au progrès de l'Hydraulique-pratique.

En 1687, Newton publia pour la première fois ses *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, où il a traité les plus importantes questions de la mécanique des corps terrestres et célestes. Il n'a pas oublié le problême du mouvement d'un fluide à la sortie d'un vase, sans s'astreindre à l'hypothèse bornée, que l'orifice soit très-petit; il imagine, pour résoudre ce problême, un vase cylindrique vertical, percé à son fond d'une ouverture de grandeur quelconque, par laquelle l'eau s'échappe, tandis que le vase en reçoit continuellement par en haut autant qu'il en dépense : de telle manière que l'eau affluente peut être regardée comme une couche d'épaisseur uniforme, créée et posée successivement sur l'eau du cylindre, qui par-là demeure constamment plein à la même hauteur;

ensuite il conçoit que l'eau du cylindre est divisée en deux parties, l'une centrale et mobile, qu'il appelle *cataracte*, l'autre adjacente et immobile, contenue extérieurement par les parois du cylindre; il suppose que la vîtesse d'une tranche horizontale quelconque de la cataracte est dûe à la hauteur de l'eau au-dessus de la tranche, en comprenant dans cette hauteur l'épaisseur de la couche de remplacement : et comme, d'un autre côté, il faut, pour la continuité de la cataracte, que les vîtesses de ses différentes sections soient en raison inverse de leurs surfaces, le calcul montre que la cataracte doit avoir la forme d'un solide produit par la révolution d'une hyperbole du quatrième genre autour de la ligne verticale qui passe par le centre de l'orifice. La même théorie est applicable à l'écoulement d'un cylindre qui se vuide sans recevoir de nouvelle eau. En comparant la quantité d'eau qui devoit sortir pendant un certain temps, suivant cette théorie, avec celle qui sort, suivant l'expérience, Newton se hâta de conclure que la vitesse à l'orifice n'étoit dûe qu'à la moitié de la hauteur totale de l'eau supérieure; mais il reconnut dans la suite que cette détermination ne pouvoit se concilier avec les hauteurs auxquelles les jets d'eau s'élèvent naturellement. Il n'avoit pas remarqué d'abord l'effet de la contraction de la veine fluide : il eut égard à cet élément dans sa seconde édition qui parut en 1714; et conservant toujours le fond de sa théorie, il substitua seulement, dans la mesure de la vîtesse, à la place de l'orifice réel, la

section de la veine contractée. Par cette correction, la vitesse calculée se trouva plus conforme à la vitesse effective; mais la théorie de Newton n'en demeura pas moins hypothétique, précaire et même fausse dans le principe. En effet, Jean Bernoulli a démontré * que si on admettoit l'existence de la cataracte newtonienne, le fluide n'exerceroit aucune pression contre les parois du cylindre; ce qui est contraire aux loix de l'Hydrostatique. Sans recourir ici à cette preuve mathématique, je me contenterai de citer une expérience bien simple qui mène à la même conclusion. Lorsqu'un vase donne de l'eau par un orifice pratiqué au fond, toutes les particules dans l'intérieur descendent verticalement : les particules latérales ne se détournent de cette direction qu'à une très-petite distance du trou, et aucune ne peut être regardée comme immobile, à moins qu'elle ne se trouve au niveau même de l'ouverture.

* Joh. Bern. Tome IV, p. 483.

Dans cette histoire abrégée des inventeurs, je ne compte pas Varignon, qui n'a déterminé la vitesse des écoulemens que d'une manière très-imparfaite; ni Guglielmini qui dans sa *mesure des eaux courantes*, et dans son traité des *fleuves*, excellent quant à la partie physique et pratique, n'a employé d'autre théorie que celle de Toricelli; ni une foule d'autres écrivains qui n'ont fait que copier leurs prédécesseurs.

Tel étoit à peu-près l'état de l'Hydrodynamique, lorsque le célèbre Daniel Bernoulli, après avoir déjà donné quelques essais sur ce sujet, parmi les

Mémoires de l'Académie de Pétersbourg; publia, en 1738, son *Hydrodynamique*, où la matière est traitée dans toute son étendue. Pour déterminer l'écoulement de l'eau par un orifice quelconque, pratiqué au fond d'un vase, il partage la masse fluide en une infinité de tranches horizontales qui sont supposées se mouvoir de telle manière : 1°. que la surface supérieure du fluide demeure toujours horizontale; 2°. que le fluide forme un tout continu, et que les vitesses varient de proche en proche par degrés insensibles; 3°. que tous les points d'une même tranche s'abaissent verticalement avec une même vitesse, qui suit la raison inverse de l'une des bases de la tranche. D'après ces données que l'expérience confirme en général, Daniel Bernoulli parvient à l'équation du problème, en faisant usage du fameux principe de la conservation des forces vives, qui a lieu pour tous les mouvemens de même nature que celui dont il s'agit ici. Il fait ensuite plusieurs applications très-intéressantes de ses formules. Quelquefois les irrégularités de la figure d'un vase, ou d'autres circonstances, produisent des changemens brusques dans les vitesses, ou des chocs d'un fluide contre un fluide : alors il se fait une perte de forces vives, et les formules de Daniel Bernoulli demandent à être modifiées : il examine encore ces questions avec sa sagacité ordinaire. Il montre partout une profonde science de l'analyse, une physique sûre, puisée dans la nature des choses, employant le calcul au besoin et jamais pour la pompe.

Quelques progrès que l'Hydrodynamique ait faits depuis l'époque où l'ouvrage de Daniel Bernoulli a paru, la postérité équitable comptera toujours cet ouvrage parmi les plus belles et les plus sages productions du génie mathématique.

Malgré le succès éclatant qu'il eut dès sa naissance, Jean Bernoulli (père de l'auteur) et Maclaurin jugeant que le principe secondaire de la conservation des forces vives, quoique vrai en lui-même, ne devoit pas être employé immédiatement à la détermination du mouvement des fluides, résolurent le problême par d'autres méthodes (d'ailleurs fort différentes entr'elles), qu'ils regardoient comme plus directes et plus étroitement liées aux premières loix de la méchanique. Leurs principaux résultats se trouvèrent conformes à ceux de Daniel Bernoulli : cependant on a reproché * de l'obscurité et des suppositions précaires à leurs méthodes. Je n'entrerai pas dans cette discussion. L'Hydraulique de Jean Bernoulli est imprimée dans le tome IV de ses Œuvres (1742); elle l'est aussi parmi les Mémoires de l'Académie de Pétersbourg, pour les années 1737 et 1738, publiés en 1744 et 1747. La théorie de Maclaurin se trouve dans son Traité des fluxions, 1742.

* Voyez le *Traité des Fluides* de Dalembert.

Il étoit réservé à Dalembert de résoudre le problême du mouvement des fluides par une méthode directe, lumineuse, et à laquelle on ne peut rien objecter. Le profond géomètre Jacques Bernoulli avoit déjà employé le principe de cette méthode

pour déterminer le centre d'oscillation des pendules composés *; mais elle étoit demeurée d'ailleurs comme inconnue des Géomètres; et Dalembert en a fait de *si* nombreuses et de si importantes applications, que vraisemblablement il l'a conçue de lui-même. Du moins ces applications, par leur difficulté et leur caractère original, composent une nouvelle mécanique générale dont il ne partage la gloire avec personne. Il a trouvé en particulier les équations du mouvement des fluides avec une extrême facilité. Après avoir fait d'abord les mêmes suppositions préliminaires que Daniel Bernoulli, il considère le mouvement actuel d'une tranche quelconque comme composé du mouvement qu'elle avoit dans l'*instant* précédent, et d'un mouvement qu'elle a perdu : les loix de l'équilibre, entre les mouvemens perdus, produisent les équations d'où résulte la connoissance des mouvemens conservés et existans successivement. Par-là, il résoud d'une manière très-simple non-seulement les problèmes des auteurs qui l'ont précédé; mais il y en ajoute un grand nombre d'autres entièrement nouveaux et de la plus grande difficulté. Son *Traité des Fluides* parut pour la première fois en l'année 1744.

* Jacob. Bern. op. p. 930, ou Académie de Paris, année 1703, p. 78.

Depuis ce temps-là, Dalembert n'a cessé, jusques à sa mort, de perfectionner et d'enrichir l'Hydrodynamique. Il voyoit avec peine que la détermination du mouvement d'un fluide dans un vase étoit astreinte à l'hypothèse que les tranches conservent leur parallélisme, et que tous les points d'une même

tranche se meuvent suivant une seule et même direction. Des tentatives réitérées lui firent trouver enfin des formules pour représenter le mouvement d'un point fluide dans un sens quelconque. Ces formules, dont la résolution ne dépend plus que de l'analyse, sont fondées sur ces deux principes qui dérivent eux-mêmes des premières loix de l'Hydrostatique: 1°. qu'un canal rectangulaire, pris dans une masse fluide en équilibre, est séparément en équilibre; 2°. qu'une portion du fluide, en passant d'un endroit à l'autre, conserve le même volume lorsque le fluide est incompressible, ou se dilate suivant une loi donnée, lorsque le fluide est élastique, ensorte que dans l'un et l'autre cas la masse demeure continue. Il publia cette nouvelle solution dans son *Essai sur la résistance des Fluides*, imprimé en 1752; il l'a depuis étendue et développée dans plusieurs volumes de ses *Opuscules mathématiques*.

Un illustre Géomètre que la nature avoit destiné à reculer les bornes de toutes les connoissances mathématiques, Euler, a donné dans quatre mémoires, imprimés parmi ceux de l'Académie de Pétersbourg (an. 1768, 1769, 1770, 1771), une nouvelle théorie générale et complette de l'équilibre et du mouvement des fluides: théorie uniforme dans les principes, fondée sur les premières loix de la mécanique et de l'Hydrostatique, et développée avec cette supériorité de science analytique qui caractérise l'auteur. Sur l'état d'équilibre des fluides, déjà connu et tant de

de fois manié, Euler fait des observations nouvelles, ou plus approfondies qu'elles ne l'avoient encore été. Il réduit ensuite toute la théorie du mouvement des fluides à deux équations différentielles du second ordre; il applique les principes généraux au mouvement de l'eau dans des vases, à son ascension dans les pompes, à son cours dans les tuyaux de conduite de diamètres constans ou variables, etc. La recherche du mouvement des fluides élastiques, et de l'air en particulier, l'a conduit à des formules très-simples sur la propagation du son, et sur sa formation dans les tuyaux d'orgue ou de flûte. Tous ces détails offrent des objets du plus grand intérêt pour les Géomètres.

Enfin M. de la Grange a donné les équations fondamentales du mouvement des fluides (Académ. de Berlin, an. 1781), par les méthodes savantes et nouvelles qu'il avoit déjà mises en usage pour la solution des problêmes de Dynamique (Acad. de Turin, an. 1762).

Les efforts réunis de tant de grands Géomètres semblent avoir épuisé toutes les ressources qu'on peut tirer de l'analyse pour la détermination du mouvement des fluides. Malheureusement ces calculs sont si compliqués par la seule nature de la chose, qu'on ne peut les regarder que comme des vérités géométriques, précieuses en elles-mêmes, mais non comme des symboles propres à peindre l'image sensible du mouvement actuel et physique d'un fluide.

Il y a des sciences qui, par leur objet, ne paroissent

destinées qu'à nourrir la curiosité ou l'inquiétude de l'esprit humain : il en est d'autres qui sortant de cet ordre purement intellectuel, servent aux besoins de la société; telle est en particulier l'Hydrodynamique. La détermination de la quantité de liqueur qui s'écoule par une ouverture proposée, la recherche du mouvement des eaux dans des canaux creusés par l'art ou par la nature, la mesure des forces que les fluides exercent par leur poids ou par leur choc, etc., s'appliquent sans cesse à l'utilité publique. Il est donc essentiel d'étendre ou de perfectionner toutes ces connoissances; et s'il y a des questions où la Géométrie n'offre pour cela que des secours trop pénibles ou même impuissans, il faut tâcher de suppléer à son défaut par la voie de l'expérience. L'exécution de ce projet a des difficultés, mais elle présente des avantages qui doivent exciter à la tenter. Des faits multipliés, analysés avec attention et rappellés, autant qu'il est possible, à des loix générales, peuvent rectifier les résultats de la théorie, ou composer eux-mêmes, par leur réunion bien combinée, une espèce de théorie, dépourvue, à la vérité, de la rigueur géométrique, mais simple, facile, et appropriée aux besoins les plus ordinaires de la pratique. Je commençai à faire toutes ces réflexions peu de temps après mon installation à la place de professeur de mathématiques à l'école du génie à Mézières. Le devoir de cette place m'obligeoit d'enseigner aux jeunes ingénieurs la mécanique des fluides, qui est nécessaire à leur état. Dans la disette où l'on

étoit alors de bons livres élémentaires sur ce sujet, je dictois à mes élèves quelques essais qui n'étoient pas destinés à devenir publics; je sentois l'insuffisance de la théorie en plusieurs cas, et je voulois consulter l'expérience avant que de commencer un corps d'ouvrage. Mes idées sur cet important objet furent goutées par les hommes éclairés et zélés pour le bien, qui avoient l'administration de l'école du génie. Le duc de Choiseul, alors ministre au département de la guerre, accorda des fonds pour faire des expériences; j'en fis, je méditai : il est résulté de tout ce travail l'ouvrage qu'on va lire, et dont voici une analyse sommaire.

Il embrasse, comme le mot général *Hydrodynamique* l'annonce, l'Hydrostatique et l'Hydraulique, c'est-à-dire, l'équilibre et le mouvement des fluides. La théorie et l'expérience sont mes deux guides et se prêtent un secours mutuel. Lorsque la théorie suffit seule pour résoudre une question, je n'y mêle point d'expériences, pour éviter les superfluités: dans les cas contraires, je m'appuie sur l'observation, pour modifier les résultats de la théorie, ou pour la remplacer.

HYDROSTATIQUE.

Les loix de l'Hydrostatique étant fort simples et ayant été suffisamment confirmées depuis longtemps par l'expérience, il ne me restoit d'autre chose à faire, à l'égard de cette science, que de l'exposer et de la démontrer suivant un ordre clair, facile et méthodique, en citant, sans les répéter, les expé-

riences qui servent de bases à certaines théories. Je prends pour principe, avec Archimède, qu'une particule quelconque d'un fluide en équilibre, est également pressée en tous sens. L'équilibre des fluides incompressibles se présente d'abord : j'examine la position que doit prendre la surface de ces fluides dans des vases solides ou flexibles, et la pression qu'ils exercent contre les fonds ou les parois des mêmes vases. Je donne la méthode générale pour déterminer la figure que doit avoir et conserver un vase flexible, quand le fluide y est parvenu à l'état d'équilibre et à une parfaite stagnation : problème que j'applique ensuite à plusieurs cas particuliers, utiles ou curieux. La même méthode, simplifiée par la nature de la question, me sert à calculer les épaisseurs qu'il convient de donner aux tuyaux de conduite, pour qu'ils puissent résister à la pression de l'eau dormante. De-là, je passe à l'équilibre des fluides élastiques : et comme tous suivent les mêmes loix, je considère spécialement l'équilibre de l'air, qui, dans leur nombre, offre le plus vaste champ de recherches et d'applications utiles. Après avoir rapporté les expériences qui établissent sa pesanteur et son élasticité, je développe, par la théorie, les résultats qui dérivent de ces expériences ; j'applique toute cette doctrine à la suspension du mercure dans le Baromètre, aux loix de la dilatation de l'air dans la machine pneumatique, à l'ascension de l'eau dans les pompes, sur quoi on trouvera ici plusieurs remarques qu'on n'avoit pas faites encore, quoique ce sujet ait été déjà traité bien des fois.

L'équilibre des corps solides flottans sur un fluide, forme une branche considérable de l'Hydrostatique, soit par ses usages dans la Physique pour la détermination des pesanteurs spécifiques des corps solides ou fluides, soit par ses applications à l'architecture navale, à la construction des digues, et à une foule d'autres ouvrages hydrauliques. La proposition fondamentale de cet équilibre n'est prouvée, pour l'ordinaire, qu'assez imparfaitement : elle n'est pas même démontrée d'une manière absolument générale dans d'excellens ouvrages *. On en trouvera ici une démonstration rigoureuse et complète. Pour que cet équilibre ait lieu, il faut en général 1°. que le *poids du solide* flottant et celui du fluide déplacé soient égaux; 2°. que les centres de gravité de ces deux corps soient situés sur une même ligne verticale. La première condition s'accomplit d'elle-même par l'enfoncement plus ou moins grand du solide dans le fluide : la seconde, supposée d'abord établie, peut être troublée continuellement, ou par les agitations du fluide même, ou par des causes extérieures, telles que l'action du vent, qui tendent à faire osciller le corps flottant. Il peut donc arriver, par exemple, que lorsqu'on aura déterminé la *carène* d'un vaisseau, ou la partie qu'on veut qu'il enfonce dans la mer, l'état d'équilibre soit exposé à se déranger, et que même le vaisseau vienne à être renversé. Le plus ou le moins de consistance ou de stabilité de l'équilibre dépend de la position respective des deux centres de gravité sur la ligne verticale. J'examine en détail les

* Voyez, par exemple, le *Traité du navire* de Bouguer, p. 204.

conditions de cette stabilité, et j'en fais l'application aux mouvemens de roulis et de tangage des vaisseaux. Cette matière est très-féconde en recherches curieuses et pratiques. Je l'avois déjà traitée au long dans mes deux pièces sur l'*arrimage des vaisseaux*, qui partagèrent les prix de l'Académie des Sciences de Paris, aux années 1761 et 1765 : on en retrouvera ici les principes développés d'une manière plus simple, plus élémentaire, et nouvelle à certains égards.

Enfin, je considère la question de la figure de la Terre, entant qu'elle dépend des loix de l'Hydrostatique. Le problême où il s'agit de déterminer le rapport des axes de la terre d'après les mesures astronomiques et géodésiques, est ici résolu sans le secours des séries qu'on avoit employées auparavant à l'exemple de Maupertuis, qui a donné le premier la solution de ce problême dans son livre de la *Figure de la Terre*.

HYDRAULIQUE.

Comme le principal objet de mon travail étoit la recherche du mouvement des fluides, je me suis appliqué à remplir cette tâche avec toute l'attention que comportent mes facultés. J'ai traité d'abord la théorie de l'Hydraulique, afin de connoître les secours qu'elle peut prêter à la pratique, et de régler là-dessus le choix des expériences qui devoient compléter mon ouvrage.

Hydraulique théorique.

Un des problêmes les plus simples, et qui, par son utilité, méritoit d'être examiné le premier, est

la détermination de l'écoulement d'un fluide par un petit orifice. Je démontre que dans l'hypothèse d'un orifice infiniment petit (ce qui dans l'état physique des choses a une certaine latitude), la vîtesse au sortir de cet orifice est dûe à la hauteur du fluide dans le réservoir. Ensuite je donne, pour un vase entretenu constamment plein au-dessus d'un petit orifice horizontal ou latéral, une équation générale qui contient la relation entre la quantité d'eau écoulée, le temps de l'écoulement, l'aire de l'orifice et la hauteur du réservoir, de manière que trois de ces choses étant données, on en conclut la quatrième. La figure du vase est indifférente.

La même théorie s'applique à l'écoulement d'un vase qui se vuide par un petit orifice, sans recevoir de nouvelle eau, avec cette différence qu'ici la figure du vase est un des élémens qui entrent dans la durée de l'écoulement. Je donne la solution générale de ce problème par l'analyse; et une solution particulière, fondée sur la sinthèse, pour un vase de forme prismatique.

Il arrive souvent que l'eau sort par des ouvertures latérales d'une certaine hauteur, telles que sont, par exemples, les vannes de moulin, les portes d'écluses, etc. Alors toutes les molécules au sortir de l'orifice n'ont pas la même vîtesse, et le mouvement général du fluide est comme indéterminable à la rigueur. Cependant lorsque le trou n'est pas fort grand par rapport aux sections horizontales du réservoir, on peut supposer, sans craindre beau-

coup d'erreur, que la vîtesse de chaque particule est dûe à la hauteur correspondante du fluide. Dans cette hypothèse regardée comme suffisamment exacte pour la plupart des problêmes de pratique, je donne la méthode pour les résoudre, soit pour des vases entretenus constamment pleins, soit pour des vases qui se vuident. L'expression que j'ai trouvée de la quantité d'eau qui s'écoule par un orifice circulaire vertical, est fondée sur un petit artifice de calcul, qui m'a conduit à une série si convergente, qu'il suffit de prendre ses deux ou trois premiers termes pour représenter sensiblement sa totalité.

Si l'hypothèse, que la vîtesse d'une molécule quelconque est dûe à la hauteur correspondante du fluide, facilite le calcul, elle s'écarte quelquefois tellement de la vérité, qu'on ne pourroit l'admettre, sans ôter à l'Hydraulique l'exactitude qui est le caractère d'une véritable science. Imaginons, par exemple, un vase cylindrique vertical rempli d'eau, et que le fond soit subitement anéanti : toutes les tranches descendront avec la même vîtesse, sans exercer aucune action les unes sur les autres, et la tranche du fond regardé comme l'orifice, n'aura de vîtesse que par sa pesanteur propre. J'ai donc résolu le problême de l'écoulement d'un fluide par un orifice horizontal de grandeur quelconque, en supposant d'abord simplement que les tranches conservent leur parallélisme, et que tous les points d'une même tranche s'abaissent verticalement avec la même vitesse. Quoique, dans cette hypothèse, les calculs

soient un peu compliqués, ils ne le sont pas néanmoins assez pour rebuter un Géomètre qui voudroit les appliquer à la pratique. Mais la méthode ne se prête pas aux écoulemens par des ouvertures latérales de grandeurs considérables. Les résultats qu'elle donne pour les orifices horizontaux, ayant encore eux-mêmes besoin de quelques corrections, je fais connoitre les moyens que Dalembert a proposés à cet égard : moyens qui demanderoient de nouvelles expériences, faciles à la vérité, mais nombreuses et délicates, qui ne promettant pas une utilité bien évidente, demeureront peut-être long-temps sans exécution.

Pour completter la théorie géométrique de l'écoulement des fluides, je donne, dans un espace assez peu étendu, mais avec une clarté suffisante, ce me semble, les formules analytiques qui représentent en général le mouvement d'une particule quelconque du fluide. Ces formules sont tirées du principe d'égalité de pression, qui servant de base aux loix de l'équilibre des fluides, conduit aussi à celles du du mouvement, suivant la méthode employée par Dalembert.

Lorsque dans un vase il se trouve des endroits resserrés, ou lorsqu'il est traversé par des diaphragmes verticaux ou horizontaux, percés de petits orifices, le mouvement du fluide est gêné, rallenti : les parties de la masse peuvent se détacher les unes des autres, et alors les formules fondées sur la loi de continuité n'ont plus lieu d'un compartiment

à l'autre. Je donne des essais pour déterminer ces sortes de mouvemens dans les cas les plus ordinaires. On y verra combien il est essentiel d'éviter les *étranglemens* dans les pompes et dans les tuyaux de conduite.

Les vases dont jusques ici nous avons considéré les écoulemens, ont été supposés ou censés fixes; mais il y a des cas où l'on a besoin de connoître le mouvement d'un fluide à sa sortie d'un vase mobile. Par exemple, lorsque l'on tire de l'eau d'un puits profond, on peut avoir intérêt de déterminer la quantité qui s'en perd par une ouverture, tandis que le seau monte. J'ai donc traité briévement cette question et ses dépendances.

Une espèce d'analogie fait succéder au problême précédent, celui des oscillations d'un fluide qui se balance dans un syphon fixe, lorsqu'ayant été dérangé de la situation d'équilibre par une cause extérieure, il est ensuite abandonné à l'action de la pesanteur. Je détermine les oscillations dans les deux hypothèses les plus conformes à la nature; je démontre que lorsque le syphon est de forme cylindrique, les balancemens alternatifs sont de même durée, et j'assigne la longueur du pendule synchrone. Cette théorie s'applique au mouvement d'ondulation d'une eau agitée.

Je reviens aux écoulemens de vases fixes, mais en y introduisant un nouvel élément indiqué par l'expérience: je veux dire la résistance du frottement contre les bords d'un orifice, ou contre les parois

d'un long tuyau de conduite; ce qui occasionne un déchet plus ou moins considérable dans le produit. Cette théorie, dont je donne les principes, peut devenir très-utile.

Les loix du mouvement des fluides élastiques demandent un examen particulier. Si on vouloit traiter ce sujet dans toute son étendue, il fourniroit seul la matière d'un gros volume. Forcé de me resserrer, je me borne à considérer les deux branches les plus utiles de cette théorie, en prenant toujours l'air pour objet d'application des méthodes générales. Dans la première recherche, je donne les formules du mouvement pour une masse d'air qui, passant d'un endroit à un autre plus ou moins grand, plus ou moins résistant, éprouve nécessairement des variations dans son volume et dans sa force élastique; ce qui amène plusieurs problêmes curieux, dont quelques-uns sont nouveaux : dans la seconde, je détermine la nature du mouvement qu'ont, les unes par rapport aux autres, les particules d'une masse d'air qui a été dérangée de sa situation d'équilibre; j'emploie, pour cela, la méthode d'Euler, laquelle donne, comme un cas particulier, la propagation du son dans les tuyaux d'orgue.

Nous arrivons à un objet de la dernière importance sous tous les rapports, à l'examen de l'action des fluides contre les corps solides qu'ils choquent ou qui viennent les choquer. Quoique la théorie ordinaire de cette impulsion ou résistance soit sujette à des difficultés qui doivent la faire rejetter abso-

lument en certains cas, je la donne néanmoins par ces considérations prépondérantes : qu'elle est fort simple, fort commode pour le calcul; qu'aucune autre n'a pu la remplacer encore sans des obstacles insurmontables de calcul, lorsqu'on a voulu passer de la spéculation aux applications pratiques; qu'elle sert de base à plusieurs excellens ouvrages, tels que la *Science navale* d'Euler, le *Traité du navire* de Bouguer, la *Manœuvre des vaisseaux* du même auteur, etc.; qu'enfin elle s'applique, sans pouvoir entraîner des erreurs considérables, à la détermination de l'effet des roues Hydrauliques mues par un courant d'eau, ce qui est le principal objet de cette partie de mon ouvrage.

Il y a trois manières de faire servir l'action de l'eau au mouvement des roues Hydrauliques: savoir, le choc, le poids et la réaction du fluide; je discute ces trois moyens.

Parent qui, par l'obscurité de ses écrits, a trop perdu de la réputation distinguée qu'il devroit avoir parmi les Géomètres, est le premier qui ait remarqué * que dans le mouvement d'une roue qu'un courant d'eau fait tourner en frappant les palettes ou ailes dont elle est garnie à sa circonférence, il existe un rapport entre la vîtesse du fluide et celle de la roue, pour que l'effet de la machine soit un *maximum*. En regardant la hauteur de l'aile dans le sens du rayon, comme très-petite, et supposant que chaque aile reçoive son coup sans être couverte par les suivantes, il a trouvé que la vîtesse de l'aile

* Mém. de l'Acad., an. 1704.

devoit être le tiers de la vîtesse du courant. Mais les deux suppositions d'où il est parti, et d'où résulte une extrême simplicité dans le calcul, enlèvent en grande partie au problême la généralité qu'on doit toujours chercher, autant qu'il est possible, dans les questions mathématiques. Personne ne l'avoit résolu dans toute sa complication, lorsque j'en publiai la solution dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1769. Je la redonne ici avec les développemens nécessaires pour en faciliter l'intelligence et l'usage.

Les roues mues par le choc de l'eau le reçoivent quelquefois suivant une direction qui n'est pas dans *leur plan*. Cette obliquité exige de nouvelles considérations, et m'a donné lieu de résoudre divers problêmes intéressans.

On emploie les roues à ailes sur les rivières et sur les canaux qui ont de médiocres pentes; mais lorsque la pente d'un canal est assez grande pour permettre de prendre l'eau en dessus de la roue, ou du moins à peu-près à la hauteur du centre, on la prend effectivement ainsi, et alors l'eau agit par son poids, qui a beaucoup plus d'efficacité que le choc, à égal volume d'eau dépensée. J'examine les effets de ces roues à *pots* ou à *augets*, soit que l'eau agisse simplement par son poids, ou qu'à cette action se mêle aussi celle du choc. Dans l'un et l'autre cas, plus la roue tourne lentement, plus son effet est grand.

En 1750, M. Segner, de l'Académie de Berlin,

imagina un tambour Hydraulique, de forme conoïdale, mobile autour d'un axe vertical, et qui peut être employé à divers usages, comme à élever de l'eau, à faire tourner des meules, etc. Ce tambour est mu lui-même par l'eau qui s'échappant de petits tuyaux dont il est garni, le repousse en conséquence et le fait tourner dans le sens contraire aux mouvemens des jets d'eau. Euler donna le calcul de cette machine dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1750, 1751 et 1754: son illustre fils, Jean-Albert Euler, l'a donné aussi dans une excellente dissertation *sur les machines Hydrauliques*, qui remporta le prix de l'Académie de Gottingue, en 1754. J'ai traité le même sujet, par une méthode un peu différente des leurs, et qui m'a conduit aux mêmes résultats.

Cette première partie de l'Hydraulique est terminée par le mouvement de l'eau dans les tuyaux de pompe.

Hydraulique expériment. Lorsque de la théorie de l'Hydraulique j'ai voulu passer à la partie expérimentale, il m'a fallu d'abord examiner le système d'expériences qu'il convenoit d'adopter pour obtenir des résultats auxquels on put appliquer avec exactitude la Géométrie et le calcul.

L'art d'interroger la Nature par la voie de l'observation est très-varié et très-délicat. Souvent la méthode, qui est avantageuse pour un cas, ne peut ou ne doit pas être employée dans un autre. Envain rassemblerez-vous des faits, si vous ne parvenez à les classer à raison de leur similitude ou de leur différence; si, lorsqu'ils sont le produit de plusieurs

causes, vous ne pouvez séparer les effets; si vos expériences, propres à vous faire connoître certains élémens, vous laissent dans l'ignorance ou dans l'incertitude par rapport à d'autres qu'il seroit nécessaire d'apprécier. Tous les jours on entend répéter que dans les sciences physico-mathématiques, une théorie qui n'est pas vérifiée immédiatement par l'expérience, ne peut être d'aucun usage dans la pratique; que les expériences doivent être faites en grand; que les expériences en petit n'apprennent rien, etc. Mais la plupart de ceux qui étalent avec confiance ces maximes vraies à plusieurs égards, seroient bien embarassés si on leur proposoit de déterminer, dans un sujet donné, le choix des expériences nécessaires ou utiles, et de fixer les dimensions sur lesquelles il convient de les exécuter. Ces connoissances préliminaires et indispensables ne peuvent s'acquérir que par un examen théorique et approfondi de la question. N'attendez rien du praticien borné et dépourvu de principes: conduit par une routine aveugle, il vous montrera sans nécessité, ou à son insu, le même fait sous différentes faces; ou il assemblera au hazard plusieurs faits dont il lui sera impossible d'expliquer les différences individuelles. Il n'existe point de science sans raisonnemens, sans analogies, ou en d'autres termes, sans une théorie qui forme une chaîne et un corps de connoissances.

Dans les matières de Physique générale, où l'on cherche seulement à découvrir et à constater l'exis-

tence d'un phénomène, sans la vouloir soumettre à la précision du calcul, rien ne prescrit exclusivement la nature des expériences. Tantôt elles pourront être faites en petit; tantôt on aura besoin qu'elles soient faites fort en grand. Mais veut-on obtenir des résultats précis et destinés à éclaircir une théorie, ou à la remplacer par une autre? Le choix des expériences doit être déterminé par des considérations particulières. Les expériences en grand n'ont pas toujours l'avantage qu'on est d'abord porté à leur attribuer. Presque jamais elles ne peuvent être assez exactes, assez répétées, assez variées, pour faire disparoître les différences sensibles qui se trouvent entre celles qui ont un même objet. On emploieroit donc, suivant ce système, bien du temps, de la peine et de la dépense pour trouver un petit nombre de faits dont l'exactitude fût tellement reconnue et constatée, qu'on pût les faire servir de base à un calcul mathématique. Les expériences trop en petit pèchent par un autre excès qui est encore plus vicieux. Elles exténuent et dénaturent les effets; elles en confondent les élémens, et le calcul n'y trouve plus de prise pour remonter à la connoissance des loix générales dont ils dépendent. Entre ces deux écueils, il y a un milieu à prendre: opérer assez en grand pour rendre les effets distincts, sans sortir des bornes compatibles avec la précision: tel est le principe qui doit diriger les expériences relatives aux sciences physico-mathématiques; telle

a été

a été ma règle dans celles que j'ai faites sur l'Hydraulique.

Ici, comme dans la théorie, je commence par les écoulemens des fluides par de petits orifices. Le mouvement au sortir de l'orifice étant une suite ou la continuation de celui que les molécules ont au-dessus, j'ai voulu voir d'abord ce qui se passe dans l'intérieur du vase. En conséquence, j'ai fait construire un cylindre de verre qui avoit environ 18 pouc. de hauteur et 6 pouces de diamètre, au fond duquel j'adaptois différens ajutages par où sortoit l'eau versée dans le vase. Soit que le cylindre fût entretenu constamment plein, soit qu'il se vuidât sans recevoir de nouvelle eau, j'ai observé que toutes les particules descendent d'abord verticalement, mais qu'à une certaine distance du trou, les particules latérales se détournent de leur première direction pour tendre vers lui de tous côtés; elles ont donc nécessairement vers ses bords des mouvemens obliques qui subsistent pendant quelque temps : de-là, il résulte que la veine fluide s'amincit et vient à former un conoïde tronqué, dont la plus grande base est l'orifice, la plus petite est une section perpendiculaire de la veine fluide à une certaine distance de l'orifice. Au-delà de cette section, la colonne conserveroit la forme cylindrique, si sa pesanteur propre et la résistance de l'air ne tendoient à la dénaturer. J'ai mesuré avec tout le soin possible les dimensions du conoïde : il m'a paru que sa hauteur est à peu-près égale au rayon de l'orifice, et

celui du tuyau qui doit fournir à sa dépense. Il est aisé, avec ces principes, de former un jet d'eau qui s'élève à toute la hauteur qu'on peut espérer. L'utilité de cette matière pour la décoration des jardins et des édifices est suffisamment connue.

Il arrive souvent qu'on a besoin de conduire de l'eau d'un point à un autre qui en est très-éloigné, et qui en est quelquefois séparé par des montagnes et des vallées. Alors on fait cheminer l'eau dans des tuyaux de fer, de bois, de grès, ou de plomb. On commettroit des erreurs souvent énormes, si après s'être assuré par le nivellement que le point de départ est plus élevé que celui d'arrivée, on déterminoit le diamètre du tuyau par les principes qui servent à déterminer l'écoulement d'un fluide qui sort d'un vase par une ouverture ordinaire, et qu'on négligeât la résistance du frottement. Cette résistance, répandue sur un long espace, rallentit considérablement la vîtesse de l'eau. Le déchet qu'elle occasionne dans la dépense initiale peut excéder 20 ou 30 fois la dépense effective, quand la conduite est fort longue et qu'elle a plusieurs sinuosités. J'ai fait sur cette matière un très-grand nombre d'expériences qui paroîtront intéressantes, si je ne me trompe, et dont j'espère que la pratique retirera plusieurs avantages. Elles montrent que toutes choses d'ailleurs égales, plus la hauteur du réservoir est grande, moins le déchet occasionné dans la dépense d'une longue conduite est sensible; ce qui est conforme à la saine théorie sur la nature du frot-

tement. Elles font connoître, du moins à peu-près, la loi suivant laquelle les dépenses diminuent à mesure qu'un tuyau devient plus long ou plus tortueux, ou l'un et l'autre à la fois. On peut se faire par leur moyen une idée de la pente qu'il convient de donner à un tuyau rectiligne, pour que cette pente répare la perte de vîtesse occasionnée par le frottement. Elles fournissent la réponse à cette question, si lorsqu'on a de l'eau à conduire d'un point à un autre qui en est séparé par des montagnes et des vallées, il faut, ou franchir directement les montagnes et les vallées, ou les contourner, en supposant que le développement de l'espace parcouru par l'eau soit le même dans les deux cas, etc. Je ne puis qu'indiquer ici en gros tous ces objets, qui demandent à être suivis dans l'ouvrage même.

Le mouvement des eaux dans des canaux offre un nouveau champ de recherches curieuses par elles-mêmes et utiles dans la pratique. Je considère d'abord le mouvement de l'eau dans un canal rectangulaire : j'examine la loi suivant laquelle le frottement diminue la vîtesse du courant. Il y a une différence sensible entre le mouvement de l'eau dans un tuyau fermé dans tout son pourtour, et celui de l'eau dans un canal qui est ouvert par en haut. Sous une même hauteur de réservoir, il passe toujours la même quantité d'eau dans un canal, quelles que soient sa pente et sa longueur ; au lieu que dans un tuyau la pente et la longueur font varier la dépense. Mes expériences prouvent que

et il croyoit qu'on pouvoit anéantir cet effet, en faisant sortir le fluide par un bout de tuyau additionnel. Mais l'expérience est encore contraire à cette opinion. La contraction de la veine fluide est une suite nécessaire de l'obliquité du mouvement avec lequel le fluide sort du vase. Cette obliquité peut être diminuée, mais non entièrement détruite. On verra qu'en faisant sortir le fluide par un bout de tuyau additionnel, on fait à la vérité augmenter la quantité de l'écoulement, mais non autant que cela devroit être, si le fluide sortoit perpendiculairement au plan de l'orifice supérieur du tuyau.

Mariotte a fait quelques expériences sur la mesure des écoulemens par des orifices, dans son *Traité du mouvement des eaux*, auquel j'ai déjà payé le tribut d'éloges qu'il mérite. Mais je ne les ai point employées, tant à cause de leur insuffisance, qu'afin de voir par mes propres yeux, et de pouvoir garantir moi-même l'exactitude des faits que j'alléguerois. J'ai donc entrepris et exécuté un système à peu-près complet d'expériences sur les écoulemens par des orifices percés en de minces parois, ou par des bouts de tuyaux additionnels.

Suivant la théorie, la dépense d'un vase entretenu constamment plein, est comme le produit du temps par l'orifice et la racine quarrée de la hauteur du réservoir, l'orifice étant supposé petit en comparaison de l'amplitude du vase : l'expérience m'a fait voir que cette loi est sensiblement vraie et qu'on peut l'employer dans la pratique ordinaire. Lorsque

Elles sont en effet très-précises et très-propres à faire connoître la percussion d'une *veine fluide* contre un plan : problème que Daniel Bernoulli avoit rendu fameux ; mais il restoit dans ce vaste champ plusieurs autres questions importantes à éclaircir.

En 1775, l'immortel citoyen Turgot, contrôleur-général des finances, nous chargea, Dalembert, Condorcet et moi, de faire une nouvelle suite d'expériences, un peu en grand, sur la résistance des fluides au mouvement de corps de diverses figures. Mes deux collègues me laissèrent presque entièrement la direction de ce travail que nous entreprîmes par le double motif, d'intérêt public, et d'amitié pour le ministre. Il s'agissoit principalement de la résistance des fluides dans les canaux où le passage des bateaux est resserré ; mais, afin de la pouvoir comparer d'une manière directe et précise avec la résistance des fluides indéfinis en étendue, nous fîmes des expériences sur l'un et l'autre objet, suivant le même plan. La résistance dans les canaux étroits étoit alors un sujet comme neuf. On savoit bien en général, d'après les assertions des bateliers hollandois, sur la difficulté de naviguer dans leurs canaux lors des basses eaux, et d'après quelques expériences de Franklin, que le retrécissement d'un canal, en profondeur ou en largeur, fait augmenter la résistance ; mais toutes ces notions ne formoient que des apperçus, et on n'en pouvoit tirer aucune loi, aucun résultat susceptible de calcul, et appli-

cable aux diverses circonstances du problème. D'ailleurs Franklin s'étoit trompé, en estimant les résistances par la simple raison inverse des temps, au lieu d'employer la raison inverse des *quarrés* des temps.

Nos expériences et nos remarques fournissent des règles pour déterminer les moindres dimensions qu'on puisse donner à un canal de navigation. Elles ont eu un autre avantage : elles paroissent avoir fixé l'opinion sur le système des canaux souterrains qu'on vouloit alors accréditer, pour l'honneur du fameux canal *Laurent,* entrepris légèrement, et ensuite abandonné. Nous avons fait voir qu'en général la confection de ces sortes de canaux, sur une longueur un peu étendue, entraîne une dépense effrayante; et nous avons conclu qu'on devoit se les interdire, si ce n'est pour des trajets courts, et lorsque les circonstances locales rendroient les communications à ciel ouvert trop difficiles ou trop couteuses par la profondeur des excavations.

En m'occupant de toute cette matière, il me vint encore le projet de faire, avec le reste de nos fonds qui avoient été soigneusement économisés, de nouvelles expériences sur la résistance qu'éprouvent toutes sortes de proues, planes, angulaires, et curvilignes. Ce projet fut exécuté en 1778. J'ai exposé les faits et les conséquences dans les Mémoires de l'Académie pour cette année-là. L'espoir que j'avois conçu que ces recherches seroient utiles au progrès de l'art nautique, n'a pas été trompé.

les vîtesses dans un canal ne suivent point la raison des racines des pentes, comme quelques auteurs l'ont avancé. Elles réfutent aussi l'opinion de ceux qui pensent qu'à égale pente et à égale profondeur du canal, les vîtesses sont entr'elles comme les quantités d'eaux écoulées. Je termine ces recherches par l'examen de diverses questions relatives aux changemens qui arrivent dans la vîtesse lorsqu'on change les dimensions du pertuis, la pente ou la largeur du canal, et à l'emplacement qu'on doit faire occuper à une machine Hydraulique qui doit être mue par le choc de l'eau d'un courant.

L'enchaînement et l'analogie des matières amènent ici le mouvement des eaux dans les rivières. Les irrégularités de leurs lits font tellement varier les vîtesses d'un endroit à l'autre, qu'on entreprendroit envain de soumettre tous ces effets à un calcul précis et rigoureux. Il faut que la Physique vienne nécessairement au secours de la Géométrie. A la lueur de ces deux flambeaux, j'entre dans plusieurs détails sur le mouvement des eaux des rivières : je fais connoître les divers moyens qui ont été proposés et employés pour déterminer la vîtesse à la surface et à différentes profondeurs du fluide. Lorsque deux rivières s'unissent, ou lorsqu'une rivière se partage en deux branches, la vîtesse et le niveau des eaux éprouvent des variations dont je cherche la nature et les causes physiques. Cette discussion me donne lieu de réfuter, en m'appuyant sur l'expérience, des erreurs qui ont été avancées à ce sujet, et qui pour-

Enfin j'ai soumis à l'expérience les effets des roues mues par le choc ou par le poids de l'eau. Pour les roues de la première espèce, j'ai trouvé que l'effet de la machine est un *maximum*, lorsque la vitesse du fluide et celle de la roue sont entr'elles comme les nombres 5 et 2 : quant aux roues à pots ou à augets, j'ai reconnu qu'elles produisent un effet d'autant plus grand, qu'elles tournent plus lentement, sauf les modifications apportées par les frottemens, ou les résistances étrangères au véritable produit de la machine. Nos lecteurs compareront ces résultats avec ceux de la théorie. J'ai fait encore plusieurs autres remarques sur les roues Hydrauliques, et sur la meilleure manière de les employer.

Tel est le précis de mes travaux sur l'Hydrodynamique. La première édition de ce Traité, qui parut en 1771, reçut un accueil favorable en France et dans les pays étrangers. Bientôt quelques-unes de mes théories et mes principales expériences trouvèrent une place honorable dans divers ouvrages sur l'Hydraulique, surtout en Italie. Ce succès m'encouragea : en 1786, je fis des augmentations et des changemens si considérables à ce Traité, qu'il prit, pour ainsi dire, une existence nouvelle, mieux ordonnée et plus solide. Enfin il reparoit aujourd'hui avec des additions qui tendent encore à l'améliorer. Je ne sollicite point l'indulgence du Public, puisqu'il me l'a déjà accordée; je me permettrai seulement ici de faire remarquer,

qu'en exposant mes propres recherches, je n'ai laissé échapper aucune occasion de rendre hommage au talent, et de célébrer les découvertes des grands hommes qui ont frayé la carrière.



HYDRODYNAMIQUE.

HYDRODYNAMIQUE.

NOTIONS GÉNÉRALES.

I.

L'HYDRODYNAMIQUE est en général une science qui a pour objet les loix de l'équilibre et du mouvement des fluides; la partie de cette science, qui considère l'équilibre des fluides, se nomme *hydrostatique*, et celle qui considère leur mouvement, se nomme *hydraulique*.

II.

On appelle *fluide*, un amas de molécules très-déliées, indépendantes les unes des autres, et parfaitement mobiles en toutes sortes de sens; tels sont l'eau, le mercure *, l'air, la flamme, etc.

Dans cette définition, les fluides sont considérés comme doués d'une parfaite fluidité; mais physiquement parlant, il n'y a point de fluides dont les parties ne soient adhérentes les unes aux autres avec une certaine force qui n'est pas la même dans

* Le mercure est réellement une substance métallique; mais comme il est habituellement dans l'état de fluidité, nous le regardons, sous ce point de vue, comme un vrai fluide.

tous, et qui peut varier dans un même fluide, par le chaud, par le froid, ou par d'autres causes physiques. Nous avons sans cesse sous les yeux des preuves de cette adhérence : si l'on jette de l'eau sur le plancher, les molécules, en s'éparpillant, ont de la peine à se séparer; lorsqu'on laisse tomber un fluide goutte à goutte, on voit que ses parties forment une espèce de filet plus ou moins sensible : plusieurs globules de mercure qui viennent à se toucher, s'unissent ensemble, et paroissent ne former qu'un même tout, etc. Il est vraisemblable que la qualité dont il s'agit, est produite par l'aspérité des parties fluides, combinée avec l'attraction réciproque qu'elles exercent les unes sur les autres. Mon but n'est pas d'approfondir cette question, ni d'examiner en quoi consiste la nature de la fluidité, ni quelle peut être la figure des molécules fluides, ni si ces molécules ont, par quelque cause secrette, ce qu'on appelle *un mouvement intestin*, indépendant de ceux que la pesanteur ou d'autres forces connues peuvent leur communiquer. J'abandonne aux physiciens et aux chimistes toutes ces recherches, sur lesquelles on ne peut guère proposer que des conjectures.

Quelques auteurs distinguent la *liquidité* d'avec la *fluidité*, comme l'espèce d'avec le genre. Selon eux, un corps est *fluide*, lorsque ses parties ne sont pas liées entre elles, qu'elles cèdent facilement au toucher, et qu'elles se répandent comme d'elles-mêmes; en ce sens, le sable fin, la cendre, un

amas quelconque de menus grains, etc. sont des *fluides;* mais, ajoutent-ils, pour qu'un corps soit *liquide*, il faut de plus que ses parties soient tellement mobiles et se balancent tellement par leur poids, que si elles sont en suffisante quantité, elles se répandent et forment une surface horizontale. Je n'admettrai pas cette distinction; et pour me conformer à l'usage le plus généralement reçu, je confondrai la liquidité avec la fluidité, de manière qu'ayant à désigner une *liqueur,* je l'appellerai indistinctement *liqueur* ou *fluide*. Il n'est question dans ce Traité que des fluides proprement dits, et nullement des fluides imparfaits, tels que sont le sable, la cendre, etc.

I I I.

Tous les fluides connus peuvent se diviser en fluides *incompressibles* et en fluides *compressibles* ou *élastiques.*

On appelle *fluides incompressibles,* ceux dont on ne peut augmenter ni diminuer le volume, en y appliquant les forces ordinaires de pression ou de percussion; telle est, par exemple, l'eau. En effet, suivant l'expérience des premiers académiciens de Florence, répétée depuis par tous les physiciens, si on enferme de l'eau dans une boule creuse, d'or, d'argent, de cuivre, d'étain, de plomb; qu'ensuite pour condenser l'eau ou pour diminuer l'espace qu'elle occupe, on comprime fortement la boule par le moyen d'une presse, qu'on la frappe

même à coups de marteau, on trouvera que l'eau ne peut être réduite en un moindre volume, et qu'elle se fait jour en forme de rosée, à travers l'enveloppe qui la contient, plutôt que de souffrir une diminution de volume. Il en est de même du vin, du mercure, etc. Mais on observera que cet effet impossible par les moyens que nous venons d'indiquer, ou qui du moins ne pourroit devenir sensible qu'en employant des forces beaucoup plus grandes que ne le permettent la nature de nos agens et celle des matières dont on fait usage dans ces sortes d'expériences, on observera, dis-je, que cet effet s'opère très-facilement et très-promptement par l'action du chaud ou du froid. Ainsi, à masse égale, l'eau chaude occupe un plus grand volume que l'eau froide; le mercure qu'on tenteroit vainement de condenser ou de dilater par des poids ou par le choc, est extrêmement sensible aux impressions du froid et du chaud : il se condense par l'un et se dilate par l'autre avec une grande mobilité, comme on en peut juger par les thermomètres à mercure.

On voit par-là que relativement aux fluides incompressibles, les forces ordinaires de compression ou de percussion doivent être regardées comme nulles par rapport aux forces d'expansion ou de contraction, produites par l'action de la chaleur ou du froid.

Les *fluides élastiques* sont ceux qui peuvent être réduits en un volume plus ou moins petit, selon

qu'ils sont plus ou moins comprimés. Par exemple, un ballon d'air que l'on comprime avec les mains, diminue de volume, puis s'étend lorsque la compression cesse ou diminue; sur quoi il faut observer que l'action du chaud et du froid est bien plus puissante que la compression pour le même effet: ainsi l'air qu'on échauffe se dilate ou tend à se dilater très-promptement, et s'il est contenu, acquiert une plus grande force élastique; ce même fluide se condense par l'action du froid.

Nous n'avons pas besoin d'avertir, puisque nous l'avons d'ailleurs insinué, que ces deux classes de fluides ne doivent pas être regardées comme géométriquement séparées l'une de l'autre. Il n'existe point de fluide parfaitement incompressible, ni de fluide parfaitement élastique; tout va par gradation dans la nature : mais nous sommes quelquefois obligés d'examiner dans nos recherches les cas extrêmes, afin de mieux démêler les effets relatifs aux différentes qualités qui peuvent se trouver dans un corps, et d'assigner à chacune de ces qualités ses fonctions propres et non celles d'une autre.

IV.

Un fluide quelconque, qui a la même densité dans toute son étendue, ou qui est composé de parties toutes de même nature, quand même la densité varieroit d'un endroit du fluide à l'autre, s'appelle un *fluide homogène*. Telle est une pièce d'eau; il est vrai que les parties du fond sont

plus comprimées que celles de la surface; mais cet excès de compression ne diminue pas le volume ou n'augmente pas la densité, et l'eau est composée d'ailleurs dans toute son étendue de parties égales et semblables. L'air est aussi un fluide homogène, quoique dans les lieux bas il ait (à raison d'une plus grande charge produite par son poids même) une plus grande densité que dans les lieux élevés, parce qu'il est composé de parties égales et semblables dans toute l'étendue de l'atmosphère. Nous observerons cependant que pour caractériser spécialement ces sortes de fluides dont la densité varie, sans que leurs parties changent de nature, on devroit les appeler *fluides homogènes à densité variable*.

Un fluide qui seroit composé de plusieurs fluides différens, comme, par exemple, d'une couche de mercure, d'une couche d'eau, d'une couche d'huile, etc. s'appelleroit un *fluide hétérogène*.

Par le simple mot *fluide*, je désignerai toujours un fluide homogène; je sous-entendrai même que sa densité est constante, à moins que le contraire ne soit énoncé ou indiqué.

V.

On doit se rappeler que la *densité* d'un corps (solide ou fluide) est la quantité de matière de ce corps, comprise sous un volume donné qu'on prend pour unité; ou, ce qui revient au même, le quotient de la masse du corps, divisée par le nombre de pieds cubes ou de pouces cubes (selon

qu'on prend le pied cube ou le pouce cube pour unité de mesure du volume), qui forment son volume total. Ainsi, en nommant M la masse, G son volume ou sa *grandeur*, D la densité, on a $D = \frac{M}{G}$; et par conséquent $M = G \times D$, c'est-à-dire, que *la masse est égale au produit du volume par la densité*. On voit que la densité d'un corps est toujours relative à celle d'un autre. Il faut avoir soin d'évaluer les volumes des deux corps en unités de la même espèce.

De même, la pesanteur spécifique d'un corps est le poids de ce corps sous un volume donné pris pour unité; ou, ce qui revient au même, le quotient du poids absolu du corps, divisé par le nombre des mesures de son volume. Si l'on nomme donc P le poids absolu d'un corps, G son volume, p sa pesanteur spécifique, on a $p = \frac{P}{G}$; et par conséquent $P = G \times p$, c'est-à-dire que *le poids absolu est égal au produit du volume par la pesanteur spécifique*. Par exemple, soit le corps proposé, de l'eau douce; on sait qu'un pied cube d'eau douce pèse 70 livres, à très-peu de chose près; prenant donc le poids d'un pied cube d'eau, pour la pesanteur spécifique de ce fluide, nous aurons $p = 70$ livres, et $P = G \times 70$ livres; si G est de 100 pieds cubes, il viendra $P = 7000$ livres; si $G = 25$ pieds cubes, on aura $P = 1750$ livres.

Dans un même endroit de la terre, ou à des

latitudes égales, les masses sont proportionnelles aux poids; on doit donc alors supposer que les densités de deux corps sont proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques, puisque les densités de ces deux corps sont des masses comprises sous le même volume, et que leurs pesanteurs spécifiques sont deux poids compris aussi sous le même volume.



PREMIÈRE PARTIE.

HYDROSTATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux de l'équilibre des Fluides.

1. Quels que soient le nombre, la quantité et la direction des forces qui agissent sur un corps solide, ou sur un système de corps solides, on peut toujours représenter les conditions de l'équilibre ou du mouvement, par des formules analytiques plus ou moins simples, suivant que les conditions du Problème le sont plus ou moins; et si dans un grand nombre de cas ces formules se trouvent trop compliquées, pour être susceptibles d'applications satisfaisantes et usuelles, on doit imputer cet inconvénient à l'imperfection de l'analyse, et non pas à la Mécanique, qui a donné tout ce qu'on étoit en droit de lui demander. La question n'est pas aux mêmes termes pour les fluides; car nous ne connoissons point le nombre, ni la masse, ni la figure, ni le volume des atomes qui composent un fluide, et par conséquent nous sommes dans l'impossibilité absolue de soumettre directement au

calcul l'action et la réaction que les molécules d'un fluide exercent les unes sur les autres en vertu des forces qui les pressent. D'ailleurs, quand même on pourroit former les équations du Problème, la pratique n'en retireroit aucune utilité, à cause de leur complication nécessaire, et absolument insurmontable à l'analyse. Il faut donc appeler ici l'expérience au secours de la Mécanique, et fonder les loix de l'équilibre et du mouvement des fluides, sur quelque propriété primitive qui soit commune à tous, et qui les caractérise d'une manière spéciale. Or, parmi les propriétés des fluides, celle qui paroît la plus simple, et qui dérive le plus immédiatement de leur nature, est qu'une masse fluide ne sauroit demeurer en équilibre, à moins qu'une particule quelconque, n'éprouve en tous sens une égale pression. Nous allons donc prendre ce principe pour la base de l'Hydrostatique.

LOI FONDAMENTALE DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES.

2. *Lorsqu'une masse fluide est en équilibre; de quelques forces que ses parties puissent être animées, chaque molécule ou portion infiniment petite de la masse est également pressée en toutes sortes de sens.* Et réciproquement, *si chaque molécule est également pressée en tous sens, tout le système sera en équilibre.*

Car, 1°. puisque toutes les particules du fluide

sont indépendantes les unes des autres, et parfaitement mobiles en toutes sortes de sens, il est visible que si une molécule quelconque étoit moins pressée d'un côté que d'un autre, elle se mouvroit nécessairement vers le côté où seroit la moindre pression, et qu'il n'y auroit plus d'équibre dans le systême; ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cette loi est démontrée par l'expérience; car si à la même profondeur d'un fluide contenu dans un vase, on fait aux parois une ouverture, et qu'à cette ouverture on applique un piston pour empêcher l'écoulement, ce piston sera repoussé par le fluide, avec la même force, soit que l'ouverture soit horizontale, ou inclinée d'une manière quelconque à l'horizon. Tout cela est également vrai pour les fluides incompressibles et pour les fluides élastiques. Sur quoi on observera qu'il peut se faire physiquement qu'à cause de l'adhérence réciproque des particules, l'équilibre subsistât quand même une molécule seroit un peu moins pressée d'un côté que d'autre : mais cette inégalité de pression ne peut qu'être extrêmement petite; et la proposition énoncée est rigoureusement vraie pour les fluides dans l'état de fluidité parfaite, tels que nous les considérons ici.

2°. Il n'est pas moins évident que si chaque molécule du fluide est également pressée en tous sens, elle demeurera en repos; d'où résultera de proche en proche le repos ou l'équilibre dans toute l'étendue de la masse.

3. *Remarque.* On voit par cette propriété la différence qu'il faut mettre entre l'équilibre des solides et celui des fluides. Dans les corps solides, la connexion des parties fait qu'une force appliquée à un point quelconque, pousse parallèlement toute la masse, et que par conséquent il y aura équilibre, si à cette force on en oppose directement une autre qui lui soit égale; dans les fluides, si chaque goutte, prise séparément, n'est pas également pressée dans tous les points de sa surface, suivant toutes sortes de sens, elle s'étendra vers les côtés où seront les moindres pressions. Supposons, par exemple, qu'à une goutte fluide soient appliquées deux forces égales, directement opposées, et deux autres forces, aussi égales entr'elles, directement opposées, perpendiculaires aux deux premières; que les deux premières soient représentées chacune par 1, et les deux autres, chacune par 2 : la goutte ne sera pas en équilibre; elle s'allongera dans le sens des forces 1, et s'applatira dans le sens des forces 2; de plus ses parties s'échapperont par les vides compris entre les forces 1 et 2. Or, si la goutte étoit un corps solide, elle seroit évidemment en équilibre. Ainsi, en la regardant comme fluide, elle forme un amas de particules dont le nombre et la figure sont telles que la goutte ne peut pas demeurer en équilibre, si en chaque point, et dans tous les sens, elle n'est pas également pressée.

4. Théorème I. *Si en un endroit quelconque* M

(Fig. 1) *d'un vase* A B C D, *fermé de tous côtés, et plein d'une liqueur considérée comme non pesante, on fait une ouverture à laquelle soit appliqué un piston poussé par une force* P; *l'action de cette force se transmettra dans tous les sens à travers la masse fluide, et chaque point d'une goutte quelconque* f g k h *souffrira la même pression que chaque point immédiatement contigu à la tête du piston.*

Car la pression que souffre chaque point fluide immédiatement contigu au piston, se transmet aux points voisins; chacun de ceux-ci la transmet pareillement à ses voisins; ainsi de suite dans toute l'étendue du fluide. La pression d'un point quelconque du fluide est donc absolument la même que celle de tout point soumis immédiatement à l'action du piston.

5. *Corollaire I.* Il suit de-là que si l'on fait en N une seconde ouverture à laquelle soit appliqué un piston poussé par une force Q, il y aura équilibre, ou ni l'un ni l'autre piston ne pourra s'enfoncer, pourvu que les forces P et Q soient entr'elles comme les ouvertures M et N, c'est-à-dire pourvu qu'on ait $P : Q :: M : N$. Car la pression de chaque point de M se transmet à chaque point de N, et réciproquement la pression de chaque point de N se transmet à chaque point de M; donc ces pressions partielles, qui sont contraires, se feront équilibre, si elles sont égales. Or la somme des pressions

de M ou la force P est proportionnelle à M, et la somme des pressions de N ou la force Q est proportionnelle à N; d'où il suit qu'on aura, pour l'équilibre, $P : Q :: M : N$.

Il en seroit de même pour un plus grand nombre d'ouvertures. Quel que soit ce nombre, si l'on applique à chacune d'elles un piston poussé par une puissance qui lui soit proportionnelle; toutes ces puissances se contre-balanceront mutuellement, et aucun des pistons ne pourra s'enfoncer et faire remonter les autres.

6. *Corollaire II.* Connoissant les deux ouvertures M et N, et l'une des puissances, on connoîtra l'autre, puisqu'on a $Q = \frac{P \times N}{M}$, ou $P = \frac{Q \times M}{N}$.

7. *Corollaire III.* On voit semblablement qu'en vertu de la force P ou Q, la face quelconque fg de la goutte $fgkh$, souffre une pression qui est exprimée par $P \times \frac{fg}{M}$ ou par $Q \times \frac{fg}{N}$; car la la pression de chaque point de M ou de N se transmet à chaque point de fg; et chaque point de fg réagit à son tour, avec la même force, contre chaque point de M ou de N; donc en nommant p la pression totale contre fg, on aura $P : p :: M : fg$, et $Q : p :: N : fg$; donc $p = \frac{P \times fg}{M}$, ou $p = \frac{Q \times fg}{N}$.

8. Théorème II. *Si l'on imagine que la surface*

d'une masse fluide A B C D O (Fig. 2), *non pesante et parfaitement libre, soit partagée en une infinité d'élémens* A, B, C, D, *et qu'à tous ces élémens soient appliqués perpendiculairement des pistons poussés par des puissances proportionnelles à leurs bases; toutes ces puissances seront en équilibre; de sorte que les particules du fluide demeureront en repos, et que la totalité de la masse n'aura aucun mouvement de translation ou de rotation.*

Pour démontrer ce Théorème d'une manière rigoureuse et complète dans toutes ses parties, j'aurai besoin des propositions suivantes.

9. Lemme I. *Si les côtés d'un polygone inflexible* A B C D E (Fig. 3) *sont poussés perpendiculairement à leurs milieux par des puissances* P, Q, R, S, T, *proportionnelles à ces côtés, et toutes dirigées du dehors au dedans, ou du dedans au dehors : toutes ces puissances seront en équilibre.*

Menez les diagonales AC, AD; il est démontré dans la Mécanique, que deux forces concourantes en un point, et leur résultante qui passe nécessairement par ce même point, peuvent être représentées par les côtés d'un triangle, perpendiculaires chacun à chacune des trois forces proposées. Ainsi les deux forces P et Q étant perpendiculaires et proportionnelles aux côtés AB, BC du triangle ABC, ont pour résultante une force (que je nomme X) perpendiculaire et proportionnelle au côté AC du même triangle. De plus, la force X

est perpendiculaire sur le milieu de *A C*; car elle doit passer par le point *a* de concours des deux forces composantes *P*, *Q*, qui est évidemment le centre du cercle qu'on circonscriroit au triangle *A B C*; d'où il suit que la force *X* est perpendiculaire sur le milieu de la corde *A C*. On démontrera de la même manière que les deux forces *X* et *R*, concourantes au point *b*, ont pour résultante une force *Y*, proportionnelle à *A D*, et perpendiculaire sur son milieu; que les deux forces *Y* et *S*, concourantes au point *c*, ont pour résultante une force *Z*, proportionnelle à *A E* et perpendiculaire sur son milieu; ainsi de suite, si le polygone avoit un plus grand nombre de côtés. Donc les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, ont pour résultante une force *Z* égale et directement opposée à la dernière force *T*; donc tout le systême des forces *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, est en équilibre.

10. *Corollaire I.* La même démonstration ayant toujours lieu, quel que soit le nombre des côtés du polygone, et par conséquent aussi lorsque ce nombre devient infini; on voit que si l'on a une courbe rentrante quelconque, inflexible, qu'on la partage en une infinité d'élémens, et qu'au milieu de tous ces élémens on applique perpendiculairement des puissances qui leur soient proportionnelles; ces puissances seront en équilibre.

11. *Coroll. II.* Considérons le polygone *ABCDE* comme la section qu'on formeroit en coupant un prisme

prisme droit par le milieu de sa hauteur, et parallèlement à ses deux bases opposées; il est clair que les milieux des côtés *AB*, *BC*, etc. sont les centres de gravité des faces rectangulaires du prisme, et que si à ces mêmes points on applique des puissances perpendiculaires et proportionnelles aux faces dont on vient de parler, ces puissances auront entr'elles les mêmes rapports que les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*. Or les puissances *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, sont en équilibre; donc aussi les puissances perpendiculaires aux centres de gravité des faces rectangulaires d'un prisme droit, et proportionnelles à ces faces, sont en équilibre.

Même résultat, lorsque la section et les bases opposées du prisme sont des courbes, et lorsqu'à tous les points des faces rectangulaires du corps prismatique sont appliquées perpendiculairement des puissances égales.

12. Lemme II. *Si au point* G (Fig. 4) *milieu de la largeur moyenne* E F *d'un trapèze* A C D B, *est appliquée une force* P *perpendiculaire et proportionnelle à la surface du trapèze; cette force pourra être décomposée en deux autres, l'une perpendiculaire et proportionnelle à la projection orthogonale* A c d B* *du trapèze, l'autre perpendiculaire et proportionnelle au rectangle* LEMNFK,

* On appelle *projection orthogonale* d'une figure, celle qui est formée sur un plan par des perpendiculaires abaissées de tous les points de la figure proposée.

qui est perpendiculaire aux deux plans parallèles A c d B, M C D N *auxquels il se termine.*

Menez par la direction de la puissance P, et perpendiculairement aux droites parallèles AB, CD, cd, LK, EF, MN, le plan SRT, qui sera par conséquent perpendiculaire aux quatre plans $ACDB$, $AcdB$, $CDdc$, $LMNK$; décomposez ensuite la force P en deux autres V, H, dirigées dans le plan SRT, la première V, perpendiculaire à ST, la seconde H, perpendiculaire à RT. Cela posé, les trois forces P, V, H, étant perpendiculaires aux trois côtés du triangle RST, on aura

$$P : V : H :: SR : ST : RT \text{ ou } ML;$$

ou bien (en multipliant la suite des conséquents par des lignes égales),

$$P : V : H :: SR \times EF : ST \times LK : ML \times LK$$
$$:: ACDB : AcdB : LMNK.$$

Or la direction de la force V est perpendiculaire à $AcdB$, et celle de la force H est perpendiculaire à $LMNK$, puisqu'elles sont dans un plan SRT perpendiculaire aux deux plans $AcdB$, $LMNK$, et que de plus la première est perpendiculaire à ST, la seconde à RT, qui est parallèle aux droites LM, KN. Donc, etc.

13. *Corollaire I.* Si la hauteur SR du trapèze $ACDB$ est infiniment petite, le point G sera le centre de gravité de ce trapèze, le point g, situé sur la ligne GV, sera le centre de gravité de la

projection $AcdB$: et comme le point G est toujours le centre de gravité du rectangle $LMNK$, il s'ensuit que si au centre de gravité d'un trapèze infiniment petit est appliquée une force perpendiculaire et proportionnelle à sa surface, cette force pourra être décomposée en deux autres, dont la première est perpendiculaire au centre de gravité et proportionnelle à la surface du trapèze de projection; la seconde est perpendiculaire au centre de gravité et proportionnelle à la surface d'un rectangle qui a une base égale à la largeur moyenne du trapèze, et pour hauteur la distance comprise entre deux plans parallèles, menés par les bases opposées et parallèles du trapèze, et sur l'un desquels est faite la projection orthogonale de ce même trapèze.

14. *Corollaire II.* La même hypothèse subsistant, imaginons une tranche solide infiniment mince, à bases parallèles, et dont la surface convexe soit composée d'une infinité de trapèzes tels que $ACDB$ poussés perpendiculairement par les forces P, toutes dirigées du dehors au dedans, ou du dedans au dehors; et qu'on fasse les projections orthogonales de tous ces trapèzes, sur l'une des bases de la tranche. Cela posé, en substituant à la place de la force P, les deux forces H et V; 1°. on voit (11) que les forces H, dans tout le contour de la tranche, se font équilibre; 2°. les forces V étant perpendiculaires aux centres de gravité des trapèzes de pro-

jection, et proportionnelles à ces trapèzes, ont pour résultante une force représentée par la somme des mêmes trapèzes, et passant perpendiculairement par le centre de gravité de leur système.

Démonstration du Théorème II.

15. Imaginons 1°. que la masse fluide *ABCDO* (*Fig.* 2) soit enfermée de tous côtés dans un vase percé d'une infinité de trous *A*, *B*, *C*, *D*, etc., auxquels sont appliqués des pistons poussés par des puissances proportionnelles aux étendues de ces trous : alors on voit (5) que toutes ces puissances se balancent mutuellement et qu'aucun des pistons ne peut s'enfoncer et faire monter les autres. D'où il résulte que les particules de la masse fluide demeurent dans une immobilité absolue, et que par conséquent, à cet égard, la masse totale peut être considérée comme si elle formoit un corps solide.

2°. Partageons d'abord ce corps en deux parties, par un plan que je suppose horizontal, pour fixer les idées, et qui forme une section que j'appelle, par la même raison, *section principale*. Concevons ensuite que chaque partie soit divisée en une infinité de tranches par des plans parallèles à la section principale, et qu'enfin les surfaces convexes de toutes ces tranches, soient partagées chacune en une infinité de trapèzes, par des plans verticaux. Les forces perpendiculaires aux centres de gravité des trapèzes latéraux, toutes dirigées du dehors au dedans, et proportionnelles à ces tra-

pèzes, étant supposées décomposées chacune en deux autres, l'une horizontale, l'autre verticale : on voit, par l'article précédent, 1°. que pour toutes les tranches qui composent le corps entier, les forces horizontales se font équilibre. 2°. Il n'est pas moins clair, relativement aux deux parties du corps, que la résultante des forces verticales, pour la partie inférieure, est proportionnelle à l'aire de la section principale, passe perpendiculairement par son centre de gravité, agissant de bas en haut; et que de même la résultante des forces verticales, pour la partie supérieure, est proportionnelle à l'aire de la section principale, passe perpendiculairement par son centre de gravité, agissant de haut en bas; d'où il s'ensuit que ces deux résultantes sont égales et directement opposées, et que par conséquent elles se détruisent. Il y a donc aussi équilibre entre toutes les forces verticales. D'où il suit enfin que toutes les forces appliquées à la surface du corps se font équilibre, et que ce corps doit demeurer dans une immobilité absolue.

Ainsi *les particules fluides demeurent en repos, et la masse totale ne peut de même prendre aucun mouvement de translation ou de rotation, puisque toutes les forces, tant horizontales que verticales, se font équilibre*; ce qui revient à l'énoncé du Théorème.

16. *Scholie général.* On voit par les deux Théorèmes précédens, et les conséquences qui en sont

les suites, la manière dont les forces extérieures à un fluide, agissent sur ses parties et sur les parois du vase où il peut être contenu. Nous allons maintenant examiner les efforts qui naissent de la pesanteur même du fluide, soit qu'ils existent seuls, ou qu'ils se combinent avec des forces extérieures.

Je suppose toujours avec Galilée, 1°. que la pesanteur d'un corps est une force constante et proportionnelle à la masse, pour toutes les distances qui ne diffèrent pas considérablement les unes des autres, où ce corps peut se trouver du centre de la terre. 2°. Que les directions des pesanteurs des parties d'un même corps qui n'est pas très-étendu en largeur, sont sensiblement parallèles entr'elles. Quand il s'agira d'autres hypothèses de pesanteur, je le dirai exprssément.

CHAPITRE II.

De l'équilibre d'un fluide soumis à l'action de la pesanteur; pression qu'il exerce contre les parois et le fond du vase où il est contenu.

17. Théorème I. *La surface d'une liqueur abandonnée à l'action libre de sa pesanteur, et en équilibre dans un vase* ABCD (Fig. 5) *qui la contient, est perpendiculaire en chacun de ses points à la direction de la pesanteur.*

Soit $A\,m\,D$ la surface libre du fluide; une particule quelconque m est pressée par la pesanteur, suivant la direction verticale $m\,n$; représentons cette force par $m\,n$, et décomposons-là en deux autres forces $m\,p$, $m\,q$, dirigées suivant les deux élémens de la courbe $A\,m\,D$, contigus au point m. Pour que la particule m demeure en équilibre, il faut que les forces $m\,p$, $m\,q$, soient égales chacune à chacune des forces que les particules voisines exercent contr'elle dans les sens opposés $p\,m$, $q\,m$. Or, ces dernières forces sont égales entr'elles, pour satisfaire à la loi générale de l'article 2. Donc les forces $m\,p$, $m\,q$, sont aussi égales; donc la direction de la force $m\,n$ partage en deux parties égales l'angle $p\,m\,q$; donc elle ne penche pas plus sur l'élément $m\,p$ que sur l'élément $m\,q$, ou ce qui

revient au même, elle est perpendiculaire en m à la courbe $A\ m\ D$. Et comme la même perpendicularité de la pesanteur aura également lieu dans tous les autres points de la courbe $A\ m\ D$, concluons que réciproquement la surface $A\ m\ D$ du fluide est perpendiculaire en chacun de ces points à la direction de la pesanteur.

18. *Corollaire.* Donc si les directions des pesanteurs de toutes les molécules du fluide vont concourir en un même point, la courbe $A\ m\ D$ sera un arc de cercle; ou, la surface du fluide fera partie d'une surface sphérique dont le centre est le point de tendance de toutes les molécules.

Lorsque les dimensions de la surface d'un fluide sont très-petites par rapport au rayon de la Terre, cette surface peut être regardée comme un plan, parce qu'alors le centre de la Terre où les pesanteurs des molécules du fluide vont concourir, peut être regardé comme placé à une distance infinie. Telle est la surface d'une pièce d'eau, celle du bassin d'un jardin, etc. En effet, soit A (*Fig.* 6) le centre de la Terre supposée sphérique; $B\ C$ un arc quelconque de sa surface; $B\ D$ la tangente au point B; $A\ D$ la sécante. Picard trouve, dans son *Traité du nivellement*, qu'en supposant le diamètre de la Terre, de 6538594 toises (ce qui est sensiblement vrai); à une distance $B\ D = 100$ toises, répond la différence de niveau $D\ C = 1\frac{1}{2}$ lignes seulement; à une distance $B\ D = 200$ toises,

répond $DC = 5\frac{1}{7}$ lignes; à une distance $BD =$ 300 toises, répond $DC =$ 1 pouce, etc.

19. Théorème II. *Si un siphon* KMNO (Fig. 7), *de figure quelconque, et dont les branches peuvent être égales ou inégales, contient de l'eau, ou tout autre fluide, les surfaces* AB, DE, *de ce fluide, dans les deux branches du siphon, seront de niveau, c'est-à-dire, dans un même plan horizontal.*

Traçons, par la pensée, dans le réservoir *FGHL* (*Fig.* 8), un siphon *KMNO* parfaitement égal à celui qui est proposé; et imaginons ensuite que l'eau du réservoir, à l'exception de la la partie *ABMDEN* qui répond au siphon fictif, vienne à se durcir sans changer de place ni de volume; il est clair que la portion d'eau, demeurée liquide, sera dans le même état de compression et de stagnation, qu'elle étoit avant que le reste de la masse se durcit, et que par conséquent les deux surfaces *AB*, *DE* demeureront de niveau. Or tout est le même dans les deux siphons des *Figures* 7 *et* 8; donc les surfaces *AB*, *DE*, étant de niveau dans celui de la *Figure* 8, le sont aussi dans celui de la *Figure* 7.

20. *Corollaire.* Le mécanisme des siphons s'applique à une infinité de phénomènes de la Nature. Ainsi, par exemple, si on creuse un puits dans le voisinage d'un étang, d'une mer, d'une rivière, etc., l'eau montera dans ce puits, et s'y mettra de niveau avec les eaux environnantes, parce que le puits

et le réservoir voisin peuvent être regardés comme les deux branches ascendantes d'un siphon, lesquelles communiquent ensemble au moyen des fentes et des crevasses qui se trouvent dans l'intérieur de la terre. De même, l'eau qu'on amène d'un point à un autre par un long tuyau, comme, par exemple, l'eau destinée à former une fontaine publique, se mettroit de niveau aux deux extrémités de la conduite, si le point d'arrivée étoit aussi élevé que celui de départ; mais le point d'arrivée étant plus bas que celui de départ, l'eau coule et forme la fontaine desirée.

21. *Remarque*. L'art du nivellement est fondé sur la proposition précédente. Mon objet n'est point d'enseigner ici cet art qu'on peut apprendre dans d'autres ouvrages, et en particulier dans le *Traité de Picard;* mais je crois devoir expliquer brièvement une méthode très-commode de tenir l'état d'un nivellement, et de s'épargner la peine de faire une multitude de profils.

Soient A, B, C, D, E, (*Fig.* 9) un nombre quelconque d'objets dont on veut déterminer la position respective par rapport à un même plan horizontal. Considérons ces objets comme s'ils étoient placés au fond d'une mer dont MN seroit le niveau; il est clair que la position des points proposés sera connue par rapport au plan horizontal MN, si l'on parvient à connoître les lignes verticales Aa, Bb, Cc, Dd, Ee. Feignons que le plan MN

soit élevé au-dessus du point *A* de départ, d'une quantité donnée et arbitraire, par exemple, de 100 pieds : vous écrirez 100 au point *A*, sur une carte ou brouillon de carte qui sert à représenter, au moins grossièrement, le terrein. L'instrument à niveller étant placé en *A*, le premier coup de niveau fera connoître de combien le point *A* est plus élevé que le point *B*; supposons que cette élévation soit de 3 pieds; vous écrirez sur la carte, 103 au point *B*, ce qui veut dire que la verticale *A a* étant de 100 pieds, la verticale *B b* est de 103 pieds. Transportez l'instrument de *A* en *B*, et regardez le point *B* comme le point du départ; le coup de niveau donné de *B* en *C*, vous fera connoître de combien le point *B* est plus élevé que le point *C*; soit cette élévation de 4 pieds 6 pouces; vous écrirez sur la carte au point *C*, 107 pieds 6 pouces pour la valeur de *C c*. En continuant à opérer toujours de la même manière, vous parviendrez à déterminer successivement les *cotes* des autres points; je suppose que les cotes trouvées soient telles que la *Figure* 9 les représente. Maintenant, voulez-vous savoir de combien le point *A* est plus élevé que le point *C*? Retranchez la cote de *A*, de celle de *C*, c'est-à-dire, 100 pieds de 107 pieds 6 pouces, le reste 7 pieds 6 pouces est la hauteur demandée. Voulez-vous savoir de combien le point *A* est plus élevé que le point *E*? Retranchez 100 pieds de 101 pieds, le reste 1 pied est la hauteur demandée, etc.

On ne se borne pas ordinairement à niveller un

terrein, c'est-à-dire, à déterminer la position des objets par rapport au plan de l'horizon; on mesure encore les distances des objets et les angles que ces distances forment entr'elles, pour avoir la représentation complète du terrein.

22. *Scholie*. On doit remarquer que la proposition de l'*article* 19, souffre une restriction dans l'état naturel et physique des fluides. Pour que la liqueur se mette réellement de niveau dans les deux branches du siphon, il faut qu'elles aient l'une et l'autre une certaine grosseur, sans que néanmoins il soit nécessaire pour cela qu'elles aient la même capacité, ni la même figure. Mais lorsque l'une des branches est fort mince, que, par exemple son diamètre n'excède pas 2 lignes environ, tandis que celui de l'autre est plus considérable; alors la liqueur ne se met plus de niveau dans les deux branches. La plupart des liqueurs, comme le vin, l'eau, l'huile, l'esprit-de-vin, etc. montent plus haut dans la petite branche (qu'on nomme *capillaire*, du mot latin *capillus*, cheveu), que dans l'autre; au contraire le mercure se tient plus bas dans la branche capillaire que dans la grosse branche. Ces phénomènes ont une cause particulière dont la recherche appartient à la Physique *. Ici je fais abstraction de cette cause, et je considère les fluides comme simplement soumis à l'action de la pesanteur qui les

* Voyez à ce sujet le *Traité de la figure de la Terre*, de Clairaut; et les *Institutions newtoniennes*, de Sigorgne.

pousse vers le centre de la Terre; d'où il suit qu'alors ils doivent toujours se mettre de niveau dans les deux branches du siphon, quel que soit le rapport des diamètres de ces branches.

23. Théorème III. *La liqueur contenue dans le vase* ABCD (Fig. 10) *étant en repos, et soumise à la seule action de la pesanteur; une particule quelconque* m *est également pressée en tous sens avec une force égale au poids de la petite colonne* o m *qui lui répond verticalement.*

En effet, 1°. la particule m est également pressée en toutes sortes de sens, autrement elle ne seroit pas en équilibre (2).

2°. La pression qu'elle souffre est égale au poids absolu de la petite colonne $o\,m$; car si l'on conçoit que la masse entière du fluide, à l'exception de la colonne $o\,m$, vienne à se durcir sans pouvoir changer de place ni de volume, la particule m demeure toujours dans le même état de compression qu'auparavant. Or, lorsque le filet $o\,m$ est seul fluide, le reste de la masse étant durci, elle porte évidemment le poids entier de ce filet $o\,m$. Donc la mesure de la pression qu'elle souffre dans tous les sens, est le poids absolu de la même colonne $o\,m$.

24. *Corollaire I.* Imaginons une courbe quelconque FmQ (*Fig.* 11) qui touche la particule m du côté de la paroi AB, et supposons que la portion de liqueur $AFmQB$ se durcisse sans pouvoir changer de place ni de volume; la particule m est

toujours pressée en tous sens, de la même manière que si la masse entière étoit demeurée fluide. On peut aussi concevoir, sans troubler l'équilibre, que la portion quelconque *DHSC* de liqueur est encore durcie. Donc si l'on a un vase quelconque *FQSH* (*Fig.* 12), un point quelconque *m* de ses parois est pressé par le fluide avec une force égale au poids absolu du petit filet vertical *o m* qui se termineroit à la surface du fluide, prolongée s'il est nécessaire; car on peut regarder la liqueur du vase *F Q S H* (*Fig.* 12) comme la portion *F Q S H* de liqueur du vase représenté (*Fig.* 11), les deux portions *A Fm Q B*, *D H S C*, étant supposées durcies.

25. *Corollaire II.* Soit *m y* une partie quelconque infiniment petite des parois du vase *FQSH* (*Fig.* 12); la pression perpendiculaire que cette partie souffre, est en raison composée du nombre de molécules qui couvrent la petite surface *m y*, et de la hauteur verticale *o m* qu'on peut regarder comme la même pour tous les points de l'élément *m y*. Ainsi en nommant *p* la pesanteur spécifique de la liqueur, la pression dont il s'agit sera exprimée par $p \times om \times my$, puisque (*Not. gén. art. v*) le poids absolu est le produit le la pesanteur spécifique par le volume.

26. Théorème IV. *La liqueur contenue dans le vase* ABCD (Fig. 13) *étant en repos, et soumise à la seule action de la pesanteur : la somme des pressions perpendiculaires que souffrent tous les élémens d'une partie quelconque finie* f n r *du fond*

ou des parois du vase, est égale au poids absolu d'une colonne qui auroit pour base la surface f n r *(convertie en une surface plane, s'il est nécessaire), et pour hauteur la distance verticale* G O *du centre de gravité* G *de la même surface* f n r, *à la surface* A D *du fluide.*

Partagez la surface $f\ n\ r$ en une infinité d'élémens fg, gx, xy, etc.; et menez les verticales ft, gu, xz, etc., terminées par la surface du fluide. En nommant p la pesanteur spécifique du fluide, les pressions perpendiculaires que souffrent les élémens fg, gx, xy, etc., sont représentées respectivement par les produits $p \times fg \times ft, p \times gx \times gu, p \times xy \times xz$, etc. Or, si l'on considère ces produits comme les momens d'autant de petits poids, par rapport au plan de niveau de la liqueur, on aura, par la Mécanique, $p \times fg \times ft + p \times gx \times gu + p \times xy \times xz +$ etc. $= p \times (fg + gx + xy +$ etc.$) \times GO = p \times fnr \times GO$; ce qui revient à l'énoncé du Théorème.

27. *Corollaire I.* Donc si le fond BC (*Fig.* 14, 15, 16) d'un vase de figure quelconque est horizontal, la pression que ce fond souffre est exprimée par $p \times BC \times GO$, p étant la pesanteur spécifique du fluide, GO la verticale élevée par le centre de gravité G du fond BC, et terminée par la surface du fluide, prolongée lorsqu'il est nécessaire.

On voit par-là que si les fonds des trois vases, représentés dans les *Figures* 14, 15, 16, sont égaux,

et que la même liqueur soit à même hauteur au-dessus du fond, dans les trois vases, on voit, dis-je, que les fonds souffriront des pressions égales. Il est en effet évident que si l'on mène (*Fig.* 15, 16) les verticales $B\,m$, $C\,n$; qu'ensuite on suppose (*Fig.* 15) que les deux portions de liqueur $AB\,m$, DCn, se durcissent en conservant toujours la même place et le même volume, et que (*Fig.* 16) les espaces $A\,B\,m$, $D\,C\,n$ étant supposés remplis de liqueur, les parois $A\,B$, $D\,C$ s'anéantissent, tout demeure le même qu'auparavant, et les trois fonds doivent être également pressés.

28. *Corollaire II.* Il peut donc se faire que la pression du fond d'un vase, et le poids total de la liqueur contenue dans ce vase soient des choses très-différentes. Dans le vase cylindrique de la *Figure* 14, la pression du fond est égale au poids de toute la liqueur; mais dans les vases des *Figures* 15 *et* 16, la première force est moindre ou plus grande que la seconde.

Lorsqu'on a un vase rempli d'eau à soulever verticalement, ou à soutenir sur un plan incliné, il faut avoir égard, dans le calcul de la puissance, au poids absolu de l'eau et du vase, et nullement à la pression contre les fonds et contre les parois; car alors on peut considérer à chaque instant le système, comme ne faisant qu'une seule et même masse solide.

(29) *Corollaire III.* Soit DC (*Fig.* 17) une surface rectangulaire

rectangulaire verticale, comme, par exemple, une vanne d'écluse, exposée à la pression de la masse d'eaux dormantes $DABC$, dont l'étendue horizontale DA est aussi grande ou aussi petite qu'on voudra, car cela est absolument indifférent quant à l'effet de la pression. Soit G le milieu ou centre de gravité de la surface DC; nommons a son côté horizontal. Cela posé, 1°. la pression perpendiculaire que supporte la surface DC, est $p \times a \times DC \times GD$, ou $p \times a \times \frac{(DC)^2}{2}$, p étant la pesanteur spécifique de l'eau.

Ainsi pour faire une application particulière, si l'on suppose $a = 3$ pieds, $DC = 12$ pieds, et conséquemment $a \times \frac{(DC)^2}{2} = 216$ pieds cubes; qu'ensuite on se rappelle que le pied cube d'eaux douces pèse 70 livres, ce qui donne $p = 70$ livres, en prenant le pied cube pour l'unité de mesure du volume : on trouvera que la valeur de la pression $p \times a \times \frac{(DC)^2}{2}$ est 15120 livres.

2°. Pour déterminer le centre P de *pression*, c'est-à-dire le point par où passe la résultante de toutes les pressions contre tous les points de DC, je partage DC en une infinité d'élémens Rr, et j'observe que le moment de la pression totale $p \times a \times \frac{(DC)^2}{2}$ devant être égal (par les principes de la statique) à la somme des momens des pressions élémentaires contre tous les Rr, on a l'équation

$$p \times a \times \frac{(DC)^2}{2} \times PD = \int p \times a \times Rr \times DR \times DR,$$

ou bien $\frac{(DC)^2}{2} \times PD = \int Rr \times (RD)^2$.

Or la somme des quantités $Rr \times (RD)^2$, prise dans toute la hauteur DC, compose évidemment une pyramide dont la base $= (DC)^2$ et la hauteur $= DC$. Donc $\frac{(DC)^2 \times PD}{2} = \frac{(DC)^3}{3}$; et par conséquent $PD = \frac{2}{3} DC$. Le centre de pression est donc placé aux deux tiers de la hauteur DC, à compter de la surface du fluide. Ce point est celui du plus grand effort des eaux, et conséquemment l'endroit où il faudroit appliquer perpendiculairement la force destinée à soutenir la poussée des eaux, la surface DC étant supposée d'ailleurs parfaitement libre et destituée de tout autre appui.

On trouveroit semblablement la pression et le centre de pression, si la surface DC était inclinée.

(30) *Corollaire IV.* On a vu (5) que les deux puissances P et Q (*Fig.* 1) appliquées à deux pistons qui pressent un fluide contenu dans un vase fermé de tous côtés, excepté en M et N, doivent être entr'elles comme les ouvertures M et N, pour se faire mutuellement équilibre; ce qui donne $Q = P \times \frac{N}{M}$. Supposons maintenant que la puissance appliquée en N ait non-seulement à contre-balancer la puissance P, mais encore la pression qui résulte contre N en vertu du poids du fluide : alors cette dernière pression étant

$p \times N \times ND$, où p est la pesanteur spécifique du fluide, il est clair que la puissance appliquée en N devra avoir pour valeur $P \times \frac{N}{M} + p \times N \times ND$.

Quant à la force nécessaire pour soutenir le vase : si on le suppose placé sur une table horizontale, cette table supportera un effort égal à la somme faite du poids du vase, du poids de l'eau, et d'un poids égal à la puissance P, cette puissance étant supposée agir verticalement de haut en bas. De plus, il faudra que l'effort de la puissance Q soit détruit par le frottement du vase sur la table, ou par un effort égal et contraire à Q.



CHAPITRE III.

De l'équilibre et de la pression des fluides mixtes ou des fluides dont la densité est variable.

31. Théorème I. *Deux fluides de différentes espèces* AFIG, EDMK (Fig. 18), *dont les bases* AF, ED *sont de niveau, et dont les pressions, en s'exerçant sur le fluide quelconque interposé* ABCD, *se balancent mutuellement, ont des hauteurs* AH, EK *réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques.*

En effet, les pressions des deux fluides $AFIG$, $EDMK$, sur leurs bases, doivent être regardées comme des poids qui, en pressant la surface du fluide $ABCD$, se font équilibre; et par conséquent (5) ces pressions sont entr'elles comme les bases AF, ED. Or, en nommant p la pesanteur spécifique du fluide $AFIG$, H sa hauteur AH, ϖ la pesanteur spécifique du fluide $EDMK$, h sa hauteur EK: les pressions dont il s'agit sont respectivement (27), $p \times H \times AF$, $\varpi \times h \times ED$. Ainsi on a la proportion $p \times H \times AF : \varpi \times h \times ED :: AF : ED$; d'où l'on tire $p \times H = \varpi \times h$, et $H : h :: \varpi : p$.

Par exemple, si le fluide $AFIG$ est de l'eau, et le fluide $EDMK$, du mercure, on aura, $p : \varpi :: 1 : 14$, et par conséquent $H : h :: 14 : 1$.

D'où il suit que, pour contre-balancer une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, il faut employer une colonne de mercure, qui ait, à peu de chose près, 28 pouces de hauteur.

32. *Corollaire I.* Donc si un fluide, dont la pesanteur spécifique est ϖ, presse sous une hauteur h, une surface, ou un autre fluide, on pourra substituer à cette pression la pression d'un fluide dont la pesanteur spécifique soit p, en donnant à ce dernier fluide une hauteur exprimée par $\frac{\varpi \times h}{p}$.

33. *Corollaire II.* De-là suit la manière de déterminer la pression sur la base MN (*Fig.* 19) d'un vase qui contiendroit des couches horizontales de différens fluides $MNKD$, $DKGC$, $CGFB$, $BFEA$; car soient ML, LP, PQ, QH, les hauteurs ou épaisseurs verticales de ces couches; p, p', p'', p''', leurs pesanteurs spécifiques : la pression du fond MN sera la même que si, à la place des couches supérieures $DKGC$, $CGFB$, $BFEA$, on substitue d'autres couches pareilles à la couche inférieure $MNKD$, et dont les hauteurs soient respectivement $\frac{p' \times LP}{p}$, $\frac{p'' \times PQ}{p}$, $\frac{p''' \times QH}{p}$; donc (27) la pression de $MN = p \times MN \times \left(ML + \frac{p' \times LP}{p} + \frac{p'' \times PQ}{p} + \frac{p''' \times QH}{p}\right) = MN \times (p \times ML + p' \times LP +$

$p'' \times Q + p''' \times Q H$). C'est-à-dire, que *pour avoir la pression du fond* MN, *il faut multiplier ce fond par la somme des produits des hauteurs et des pesanteurs spécifiques des couches fluides contenues dans le vase.*

34. Théorème II. *Le fluide* ABC (Fig. 20), *pesant et contenu dans un vase, étant supposé composé d'une infinité de couches, dont la densité varie suivant une loi quelconque; il y aura equilibre dans ce fluide, si toutes les couches sont de niveau, ou perpendiculaires à la direction de la pesanteur.*

Imaginons d'abord que la couche la plus basse *MNB*, existe seule, et qu'elle soit en équilibre: sa surface *MN* sera horizontale (17). D'un autre côté, il est clair (8) que cette couche conservera son état, si à chacun de ses points on applique perpendiculairement des puissances égales, de quantités quelconques; car qu'elle soit pesante ou non, les efforts de ces puissances agissent de la même manière les uns contre les autres et contre les parois du vase. Or, les puissances dont il s'agit ne sont autre chose que les pressions résultantes du poids des tranches supérieures *MNQP*, *PQSR*..... *DECA*; et on voit que tous les points de *MN* souffriront des pressions égales, si tous les plans *PQ*, *RS*..... *DE*, *AC*, sont horizontaux. Par conséquent, dans cette hypothèse, la tranche *MNB* est en équilibre. On

prouvera de même que la tranche $MNQP$ est en équilibre, lorsque les plans $RS\ldots DE$, AC, sont horizontaux; ainsi de suite. Il y a donc équilibre dans toute l'étendue du fluide, lorsque ses couches sont horizontales.

35. Problème. *Déterminer la pression que le fluide du Théorème précédent exerce contre une partie quelconque des parois du vase?*

Par le point B, le plus bas du fluide, soit élevée la verticale BH; on voit, par exemple, que le point B porte tout le poids du filet vertical BH, ou la somme des poids des filets partiels Bb, bc, cd, etc. Or, si l'on nomme respectivement ϖ, ϖ^{1}, ϖ^{11}, etc. les densités ou pesanteurs spécifiques des tranches MNB, $MNQP$, $PQRS$, etc.: le poids du filet $Bb = \varpi \times Bb$; celui du filet $bc = \varpi^{1} \times bc$; celui du filet $cd = \varpi^{11} \times cd$, etc. Ainsi la pression du point B a pour valeur $\varpi \times Bb + \varpi^{1} \times bc + \varpi^{11} \times cd +$ etc. Et comme cette valeur est la même chose que

$$\varpi \times \left(Bb + \frac{\varpi^{1} \times bc}{\varpi} + \frac{\varpi^{11} \times cd}{\varpi} + \text{etc.}\right),$$

$$\text{ou } \varpi^{1} \times \left(bc + \frac{\varpi \times Bb}{\varpi^{1}} + \frac{\varpi^{11} \times cd}{\varpi^{1}} + \text{etc.}\right),$$

$$\text{ou } \varpi^{11} \times \left(cd + \frac{\varpi \times Bb}{\varpi^{11}} + \frac{\varpi^{1} \times bc}{\varpi^{11}} + \text{etc.}\right),$$

ou, etc.: on voit qu'on peut substituer au fluide proposé, un fluide dont la densité soit la même sur toute la hauteur BH.

Qu'on mène par les deux points quelconques

F, f, infiniment voisins, les deux plans horizontaux $G\,T$, $g\,t$, lesquels déterminent les deux élémens $G\,g$, $T\,t$, des parois du vase. Il résulte sur chaque point de $G\,g$ ou de $T\,t$, une pression perpendiculaire égale à la pression du point F; ce qui est évident (23), en substituant à notre fluide un fluide dont la densité soit constante. Or la pression du point F est le poids absolu du filet vertical $H\,F$; et comme, en faisant $H\,F = x$, la densité ou la pesanteur spécifique du fluide en $F = \phi$, le poids du filet $H\,F$ est évidemment $\int \phi\, d\,x$, il s'ensuit que la pression perpendiculaire que souffre $G\,g$, est $G\,g \times \int \phi\, d\,x$, et que la somme des pressions contre $A\,G$ est $\int G\,g \times \int \phi\, d\,x$. Faisons quelques applications particulières de cette formule.

36. Exemple I. *On demande la pression que supporte le fond horizontal* K D *du vase* A K D C (Fig. 21), *les densités des tranches* G T, M N, *étant entr'elles comme les hauteurs* H F, H b?

Soient $H\,B = a$, la densité du fluide en $K.D = \varpi$; on aura, $\phi = \frac{\varpi\, x}{a}$, $\int \phi\, d\,x = \int \frac{\varpi\, x\, d\,x}{a} = \frac{\varpi\, x^2}{2\,a} = \frac{\varpi\, a}{2}$, en faisant $x = a$. Donc la pression du fond $K\,D$ sera $\frac{\varpi\, a}{2} \times K\,D$.

Ce résultat peut se trouver par les simples élémens de la Géométrie, en considérant que les densités peuvent être censées former une progression arithmétique, dont le premier terme, qui répond au

point H, est zéro, le dernier ϖ, et le nombre des termes, HB.

37. Exemple II. *Le vase* AKDC (Fig. 22), *étant supposé rectangulaire, on demande la pression que souffre la partie* VY *de la paroi verticale* AK, *les densités du fluide étant proportionnelles aux hauteurs, comme dans l'exemple précédent ?*

En faisant $HB = a$, la densité du fluide en $KD = \varpi$, on aura, $\phi = \frac{\varpi x}{a}$, $\int \phi\, dx = \int \frac{\varpi x\, dx}{a} = \frac{\varpi x^2}{2a}$; et $\int G g \int \phi\, dx = \int \frac{\varpi x^2\, dx}{2a} = \frac{\varpi x^3}{6a} + A$. La constante A doit être telle que l'intégrale ou la pression s'évanouisse, lorsque $x = AV$; ce qui donne $A = -\frac{\varpi \times (AV)^3}{6HB}$. Faisant ensuite $x = AY$, on aura $\frac{\varpi \times (AY)^3 - \varpi \times (AV)^3}{6HB}$, pour la valeur totale de la pression contre VY.

On pourroit parvenir au même résultat, sans le secours du Calcul intégral, en considérant que les poids absolus des filets HF, et par conséquent aussi les pressions contre les élémens de VY, croissent comme les carrés des hauteurs HF, ou comme les élémens d'un tronc de pyramide, lequel a pour hauteur VY, pour base supérieure $\frac{\varpi \times (AV)^2}{2HB}$,

et pour base inférieure $\frac{\pi \times (AY)^2}{2HB}$. D'où il suit que la valeur de ce tronc, ou de la pression contre VY, est $\frac{\pi \times (AY)^2}{2HB} \times \frac{AY}{3} - \frac{\pi \times (AV)^2}{2HB} \times \frac{AV}{3}$, ou $\frac{\pi \times (AY)^3 - \pi \times (AV)^3}{6HB}$.

CHAPITRE IV.

De l'épaisseur que doivent avoir les tuyaux de conduite, pour résister à la pression des fluides stagnans.

38. On appelle *tuyaux de conduite*, les tuyaux qui mènent l'eau d'un réservoir à un endroit plus bas, pour y former un jet d'eau, une fontaine, etc.

39. Lemme. *Si à tous les angles d'un polygone régulier flexible* ABCDEF (Fig. 23), *sont appliquées des puissances* P, Q, R, etc. *dirigées du centre* O *à la circonférence, et en équilibre :* 1°. *toutes ces puissances sont égales ;* 2°. *tous les côtés du polygone sont également tendus ;* 3°. *la somme de toutes les puissances est à la tension de l'un quelconque des côtés du polygone, comme le contour du polygone est au rayon du cercle circonscrit.*

Prenez arbitrairement, sur la direction de l'une

P des puissances, la partie Ay pour la représenter, et achevez le parallélogramme $Axyz$, dont les côtés Ax, Az tombent sur les côtés AB, AF du polygone. La puissance P, la tension du cordon AB, et celle du cordon AF étant en équilibre, seront proportionnelles aux trois lignes Ay, Ax, xy, ou (à cause des deux triangles isoscèles semblable Axy, AOB), aux trois lignes AB, OB, OA; de même la puissance Q, la tension du cordon BC, et celle du cordon BA, sont proportionnelles aux trois lignes BC, OC, OB; ainsi de suite. Or, dans toutes ces suites de proportionnelles, il règne évidemment le même rapport, puisqu'en vertu de l'équilibre, chaque côté du polygone est également tendu en sens opposés. Ainsi en nommant x, g, h, k, l, z les tensions des côtés AB, BC, CD, etc. du polygone, on aura $P : Q : R : S : T : V : x : g : h : k : l : z :: AB : BC : CD : DE : EF : FA : OB : OC : OD : OE : OF : OA$. Donc 1°. à cause de $AB = BC = CD = DE = EF = FA$, on aura $P = Q = R = S = T = V$. 2°. A cause de $OB = OC = OD = OE = OF = OA$, on aura $x = g = h = k = l = z$. 3°. On aura $P + Q + R + S + T + V : x :: AB + BC + CD + DE + EF + FA : OB$.

40. Théorème. *Si l'on a* (Fig. 24 et 25) *deux cylindres flexibles* ABCD, abcd, *droits ou inclinés, remplis de liqueurs de différentes espèces;*

les tensions des deux circonférences BMNC, bmnc *des bases, suivant les directions des tangentes en chacun de leurs points, seront entr'elles en raison composée de leurs rayons* BH, bh, *des pesanteurs spécifiques des liqueurs, et des hauteurs verticales des cylindres.*

Je suppose que les bases *BMNC, bmnc*, sont horizontales, ou que du moins tous leurs points puissent, dans chaque cylindre, être regardés comme également éloignés des surfaces supérieures des fluides; ce qui a lieu dans la pratique, puisqu'on ne cherche les épaisseurs des tuyaux, que pour des tuyaux dont les hauteurs sont considérables en comparaison de leurs diamètres.

Soient *AB*, *ab* les hauteurs verticales de nos deux cylindres; p et ϖ les pesanteurs spécifiques des deux liqueurs; F et f les tensions des deux circonférences *BMNC, bmnc*. Il est clair que les sommes des pressions exercées du dedans au-dehors, suivant les directions des rayons, sur tous les points des deux circonférences *BMNC, bmnc*, par les fluides *ABCD*, *abcd*, sont exprimées par les produits $p \times BMNC \times AB$, et $\varpi \times bmnc \times ab$. Or, par l'article précédent, on a les deux proportions :

$$p \times BMNC \times AB : F :: BMNC : BH,$$
$$\varpi \times bmnc \times ab : f :: bmnc : bh.$$

Mais les circonférences *BMNC, bmnc*, sont entr'elles comme leurs rayons *BH, bh*, c'est-à-dire,

$BMNC : BH :: bmnc : bh$. Donc on aura $p \times BMNC \times AB : F :: \varpi \times bmnc \times ab : f$; ou bien $F : f :: p \times BMNC \times AB : \varpi \times bmnc \times ab$; ou bien encore (en mettant pour la raison de $BMNC$ à $bmnc$ celle de BH à bh),

$$F : f :: p \times BH \times AB : \varpi \times bh \times ab.$$

41. Problème. *Déterminer le rapport des épaisseurs que doivent avoir deux cylindres composés d'anneaux flexibles pour résister aux efforts de deux fluides qui tendent à les rompre ?*

Coupons les deux cylindres de l'article précédent suivant leurs bases $BMNC$, $bmnc$; et soient (*Fig.* 26 *et* 27), les deux couronnes ou anneaux $BSERKM$, $bserkm$, les sections résultantes. Imaginons que ces anneaux soient composés d'une infinité de filets représentés par les circonférences $XYVZ$, $xyvz$; les résistances qu'ils opposent à leur rupture, sont évidemment en raison composée des nombres de filets, ou des épaisseurs BS, bs, et des ténacités des matières qui forment les tuyaux. Donc, en nommant R et r les deux résistances dont il s'agit; E et e les épaisseurs BS et bs; T et t les ténacités des matières dont les tuyaux sont faits : on aura $R : r :: ET : et$. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que les forces R et r soient égales respectivement aux forces F et f dont il a été parlé dans l'article précédent. Donc, en nommant H et h les hauteurs des liqueurs dans les deux cylindres, D et d les

diamètres des bases des mêmes cylindres : on aura $ET : et :: \frac{p \times H \times D}{2} : \frac{\varpi \times h \times d}{2}$. Donc $E : e :: \frac{p \times H \times D}{T} : \frac{\varpi \times h \times d}{t}$, c'est-à-dire que les épaisseurs des deux anneaux proposés, sont comme les produits des pesanteurs spécifiques des liqueurs, des hauteurs des liqueurs, des diamètres des tuyaux, divisés par les ténacités des matières dont les tuyaux sont composés.

42. *Corollaire I.* Lorsque les liqueurs sont de même espèce aussi bien que les matières dont les tuyaux sont faits, on a $p = \varpi$, $T = t$, et la proportion précédente devient $E : e :: HD : hd$.

43. *Corollaire II.* Si on a $p = \varpi$, $T = t$, $D = d$, on aura $E : e :: H : h$. Par où l'on voit que toutes choses d'ailleurs égales, l'épaisseur d'un anneau doit être d'autant plus grande que la hauteur du fluide placé au-dessus est plus grande.

Ainsi on se jète dans une dépense superflue et absolument inutile, en donnant la même épaisseur à tous les tuyaux d'assemblage qui doivent former une conduite destinée à soutenir l'eau à une hauteur considérable ; car si les parties inférieures ont une épaisseur suffisante, comme elles doivent l'avoir en effet, les parties supérieures ont nécessairement trop d'épaisseur. On fait cette faute en une infinité d'occasions : on l'a faite notamment dans les anciens tuyaux de la Machine de Marly. Il seroit pourtant

bien aisé d'avoir des tuyaux d'assemblage de même diamètre intérieur, et de trois ou quatre épaisseurs différentes; de placer en bas les tuyaux les plus épais, et successivement les autres, à raison des différentes hauteurs de l'eau.

44. *Scholie.* Pour pouvoir appliquer la théorie précédente à la pratique, il faut connaître, par une expérience immédiate, l'épaisseur qu'un certain tuyau doit avoir pour résister à la pression d'un fluide donné; il faut de plus connoître les ténacités des matières dont les tuyaux peuvent être composés. Les auteurs qui ont fait des expériences de ce genre, donnent des résultats quelquefois très-différens les uns des autres. Je vais déterminer les épaisseurs des tuyaux de plomb et de cuivre, d'après une expérience faite autrefois à Versailles, et une proposition de Mariotte, rapportées l'une et l'autre dans un recueil, qui a pour titre : *Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique, par MM. de l'Académie des Sciences*; Paris, 1693.

L'expérience est *qu'un tuyau de plomb de* 16 *pouces de diamètre, épais de* $6\frac{1}{2}$ *lignes, a soutenu* 50 *pieds de charge d'eau* (p. 516 de l'ouvrage cité).

La proposition de Mariotte est *qu'un tuyau de cuivre de* 6 *pouces de diamètre, sous* 30 *pieds de charge d'eau, doit avoir* $\frac{1}{2}$ *ligne d'épaisseur* (p. 513).

Il peut se faire que les épaisseurs dont il s'agit soient plus grandes qu'il ne le faudrait pour le simple état d'équilibre; car il n'est point dit dans l'expérience

citée, qu'on ait diminué l'épaisseur du plomb jusqu'à ce que le tuyau vînt à crêver; ni dans la proposition de Mariotte, qu'on ait soumis le cuivre à la même épreuve. Mais on fait très-sagement dans la pratique de porter ainsi les mesures au-delà des limites de l'équilibre.

En appliquant aux deux hypothèses précédentes, la proportion générale de l'article 41, $E : e :: \frac{p \times H \times D}{T} : \frac{\pi \times h \times d}{t}$, elle deviendra $6\frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: \frac{50 \times 16}{T} : \frac{30 \times 6}{t}$; d'où résulte $\frac{T}{t} = \frac{40}{117}$. Ce rapport de la ténacité du plomb à celle du cuivre, est fort différent de celui qu'on trouveroit en comparant ensemble les poids que deux fils, l'un de plomb, l'autre de cuivre, peuvent soutenir sans se rompre. Mais je crois que dans les applications qu'on peut faire de nos formules, il est à-propos d'employer l'expérience de Versailles, et la proposition de Mariotte, comme étant immédiatement fondées sur des élémens semblables à ceux des formules dont il s'agit.

D'après ces bases, *si on propose de déterminer l'épaisseur que doit avoir un tuyau de plomb de* 6 *pouces de diamètre, et qui doit soutenir l'effort d'une colonne d'eau de* 100 *pieds de hauteur :* On trouvera (en nommant x l'épaisseur cherchée) $50 \times 16 : 100 \times 6 :: 6\frac{1}{2}$ lignes : $x = 4\frac{7}{8}$ lignes.

De même, *si on demande l'épaisseur que doit avoir un tuyau de cuivre de* 4 *pouces de diamètre pour*

pour soutenir l'effort d'une colonne de mercure de 50 *pieds de hauteur :* on se rappellera d'abord que la pesanteur spécifique de l'eau est à celle du mercure, comme 1 est à 14 ; ainsi en employant la proposition de Mariotte, et nommant x l'épaisseur cherchée, on aura $30 \times 6 \times 1 : 50 \times 4 \times 14 :: \frac{1}{2} : x = 7\frac{7}{9}$ lignes.

CHAPITRE V.

De l'Equilibre des Fluides dans des vases flexibles.

45. LORSQU'UN vase est solide, le fluide qu'il contient s'adapte à sa forme intérieure, et la surface de ce fluide, supposée libre, est toujours horizontale ; mais quand les parois du vase sont flexibles, ce vase prend une figure particulière, telle que la demande l'équilibre des forces auxquelles le fluide est soumis ; avec cette condition généralement nécessaire, que si la partie supérieure du fluide en a la liberté, elle se met de niveau, comme si le vase étoit solide ; car aussitôt que l'équilibre est établi dans un vase flexible, rien n'empêche de regarder ce vase comme solide. Voici les principes d'après lesquels on peut déterminer en général la figure d'un vase flexible.

46. Lemme. *Déterminer les conditions de l'équilibre d'un polygone flexible, à chacun des angles*

duquel sont appliquées deux sortes de forces, dirigées du dedans au dehors, les unes qui divisent les angles du polygone en deux parties égales, les autres qui sont toutes parallèles à une ligne donnée de position?

Soient (*Fig.* 28) AB, BC, CD, trois côtés consécutifs du polygone proposé; P et P' les puissances qui divisent en deux parties égales les deux angles ABC, BCD du polygone; p et p' les puissances parallèles entr'elles et à une ligne donnée de position. Ayant pris BM et BN pour représenter les deux forces P et p, j'achève le parallélogramme $BMON$, afin de réduire ces deux forces à une force unique, représentée par la diagonale BO. Je forme le second parallélogramme $BOKH$, dont BO est un côté, la diagonale BK tombe sur le côté CB prolongé, et le côté BH tombe sur le côté AB du polygone. Alors il est évident que BK exprime la tension du côté CB, dans le sens CB. En faisant la même opération pour l'angle C que pour l'angle B, c'est-à-dire le parallélogramme $Cmon$ analogue au parallélogramme $BMON$, et le parallélogramme $Cokh$ analogue au parallélogramme $BOKH$; on voit que Ck exprime la tension du côté BC, dans le sens BC. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le côté BC soit également tendu dans le sens CB et dans le sens opposé BC. Reste donc seulement à trouver les expressions des lignes BK, Ck, et à les égaler entr'elles.

Le triangle BOK donne $BO : BK :: \sin. BKO : \sin. BOK$; et par conséquent $BK = \frac{BO \times \sin. BOK}{\sin. BKO}$. Or, ang. $BKO =$ ang. ABK; et ang. $BOK =$ ang. $BOM +$ ang. $MOK =$ ang. $OBp +$ ang. ABZ. Ainsi $BK = \frac{BO \times \sin. (OBp + ABZ)}{\sin. ABK}$; ou $BK = \frac{BO \times (\sin. ABZ. \cos. OBp + \cos. ABZ. \sin. OBp)}{\sin. ABK}$, le sinus total étant pris pour l'unité. Mais, si du point O on abaisse OR perpendiculaire sur Bp, on aura $\sin. OBp = \frac{OR}{BO} = \frac{ON \times \sin. ONR}{BO} = \frac{P. \sin. PBp}{BO}$; $\cos. OBp = \frac{BR}{BO} = \frac{BN + NR}{BO} = \frac{p + P. \cos. PBp}{BO}$. Donc $BK = \ldots$

$$\frac{\sin. ABZ\,(p + P. \cos. PBp) + P. \cos. ABZ. \sin. PBp}{\sin. ABK} =$$

$$\frac{p. \sin. ABZ + P(\sin. ABZ. \cos. PBp + \cos. ABZ. \sin. PBp)}{\sin. ABK}$$

$$= \frac{p. \sin. ABZ + P. \sin. (ABZ + PBp)}{\sin. ABK}$$

$$= \frac{p. \sin. ABZ + P. \sin. ABY}{\sin. ABK}.$$

On trouvera de même $Ck = \frac{p'. \sin. DCZ' + P'. \sin. DCY'}{\sin. DCk}$. Égalant cette valeur à celle de BK, on aura l'équation ($\mathcal{A}$)

$$\frac{p. \sin. ABZ + P. \sin. ABY}{\sin. ABK} = \frac{p'. \sin. DCZ' + P'. \sin. DCY'}{\sin. DCk},$$

qui exprime les conditions de l'équilibre pour trois côtés contigus quelconques du polygone.

47. *Remarque*. On comprend assez que les conditions de l'équilibre sont les mêmes, et doivent par conséquent s'exprimer de la même manière, soit que le polygone forme une figure continue, soit que, par exemple, on suppose que les côtés AS, DX sont attachés à des points fixes S, X, et que la partie SVX du polygone n'existe point; car le polygone étant flexible, l'équilibre doit avoir lieu séparément dans toutes ses parties, n'importe comment les efforts des points extrêmes d'une partie quelconque soient contre-balancés.

48. Problème. *Déterminer la courbe que doit former un vase flexible, chacun de ses points étant supposé sollicité par deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, l'autre parallèle à l'axe des abscisses ou à celui des ordonnées ?*

La solution de ce problème se tire du lemme précédent, en supposant que le polygone dont il y est question a une infinité des côtés, ou forme une courbe (*Fig.* 29).

Que AB, BC, CD soient trois élémens consécutifs de cette courbe; OV, ON les deux axes des coordonnées perpendiculaires; et que les forces P, P' étant perpendiculaires à la courbe, les forces p, p' soient parallèles à l'axe OV. Ayant mené à l'axe ON les ordonnées AL, BL', CL'', supposons $OL = x$, $OL' = x'$, $OL'' = x''$; $AL = y$, $BL' = y'$, $CL'' = y''$; un élément quelconque de la courbe $= ds$, différentielle que je regarderai comme

constante; nommons de plus R le rayon de la développée qui répond au point B, et R' celui qui répond au point C. Il est clair qu'on aura ici sin. $ABZ = \frac{dx}{ds}$, sin. ABY = sinus total $= 1$; sin. $ABK = \frac{ds}{R}$; sin. $DCZ' = \frac{dx''}{ds}$; sin. $DCk = \frac{ds}{R'}$; $P' = P + dP$; $p' = p + dp$: par conséquent l'équation (A) de l'article 46 deviendra $R(p\,dx + P\,ds) = R'[(p + dp)\,dx'' + (P + dP)\,ds]$, ou bien (en observant que $dx'' = d(x' + dx') = d(x + 2dx + ddx) = dx + 2\,ddx + d^3x$; $R' = R + dR$; effaçant les termes qui se détruisent, et négligeant les infiniment petits qui passent le second ordre),

$$(B)\quad p\,dx\,dR + R\,dx\,dp + 2\,R\,p\,ddx + R\,dP\,ds + P\,dR\,ds = 0:$$

équation que l'on intégrera, s'il est possible, lorsque l'on connoîtra la loi des forces P et p, comme on va le voir par quelques exemples.

49. *Corollaire I.* Supposons que la courbe $MANG$ soit posée sur un plan horizontal, que les forces p s'évanouissent, et que les forces P, perpendiculaires à la courbe, soient constantes. Alors on aura $p=0$, $dp=0$, $P=C$, $dP=0$; et l'équation (B) deviendra simplement $C\,dR = 0$; ce qui donne pour R une quantité constante, et fait voir que dans cette hypothèse la courbe demandée est un cercle.

Il suit de-là que si l'on emplit de liqueur un vase prismatique vertical, et dont les parois sont

parfaitement flexibles, sans être extensibles, le vase prendra la figure d'un cylindre droit; car si l'on décompose sa surface convexe en une infinité d'anneaux par des plans horizontaux, chaque anneau sera pressé perpendiculairement en chacun de ses points par le fluide, avec une force constante, et prendra par conséquent, dans l'état d'équilibre, la figure d'un cercle.

50. *Corollaire II.* Que la courbe MAN, considérée comme uniformément pesante, soit située dans un plan vertical, et attachée en M et N à deux points fixes de niveau, la partie MGN étant supprimée. La surface MN du fluide est horizontale; les forces P, qui expriment les pressions perpendiculaires de ce fluide en chaque point des parois du vase, sont proportionnelles aux lignes verticales BL', et les forces p sont les poids des élémens de la courbe. Nommons g la gravité, b la largeur de la surface sur laquelle s'exerce la pression du fluide; c^2 l'aire de la section perpendiculaire à la corde regardée comme cylindrique. On aura $P=gby'ds$ $=gb(y+dy)ds$, $dP=gb(dy+ddy)ds$, $p=gc^2ds$, $dp=0$. Substituant ces valeurs dans l'équation (B), elle deviendra, $c^2dxdR+2Rc^2ddx+bRdyds+bydRds=0$, ou bien $c^2dxdR+c^2Rddx+bRdyds+bydRds=-c^2Rddx$, ou (en mettant pour R sa valeur $\frac{ds\,dy}{ddx}$ dans le second membre), $c^2\,dx\,dR+c^2\,R\,d\,d\,x$

$+ bRdyds + bydRds = - c^2 dsdy$, dont l'intégrale est $c^2 Rdx + byRds = \mathcal{A} ds - c^2 y ds$. Éliminant R, on aura $c^2 dx dy ds + c^2 y ds ddx = \mathcal{A} ds \cdot ddx - by dy ds^2$, dont l'intégrale est $c^2 y dx ds = B ds^2 + \mathcal{A} dx ds - \frac{by^2 ds^2}{2}$, équation d'où l'on tire enfin celle-ci :

$$dx = \frac{(2B - by^2)dy}{\sqrt{[(2c^2y - 2\mathcal{A})^2 - (2B - by^2)^2]}},$$

laquelle s'intègre en général par les quadratures des courbes. Cette intégration introduira dans le calcul une troisième constante C. Pour déterminer les trois constantes $\mathcal{A}$, B, C, on observera 1°. que $y = 0$, donne $x = 0$, ou $x =$ une quantité déterminée, puisqu'on est maître de placer à volonté l'origine de la courbe; 2°. que les points extrêmes M et N sont donnés de position; 3°. que la longueur de la corde $M\mathcal{A}N$ est donnée; ou que la courbe fait, par exemple, en M un angle donné avec l'axe MN; ou qu'elle satisfait à quelque condition équivalente.

51. *Corollaire III:* Si dans l'hypothèse de l'article précédent, on a $\mathcal{A} = 0$, $B = 0$, on trouvera $x = C + \sqrt{\left(\frac{4c^4}{b^2} - y^2\right)}$, équation au cercle.

52. *Corollaire IV.* La même hypothèse de l'article 50 étant d'abord reprise en général :

1°. Si l'on fait $c^2 = 0$, ou si la courbe $M\mathcal{A}N$

peut être regardée comme non pesante, on aura $dx = \frac{(2B - by^2)\,dy}{\sqrt{[4A^2 - (2B - by^2)^2]}}$, équation de la *lintéaire* commune.

2°. Si l'on fait $b = 0$, ou que la liqueur puisse être regardée comme non pesante, on aura $dx = \frac{B\,dy}{\sqrt{[(c^2y - A)^2 - B^2]}}$, équation de la *chaînette*.

53. *Scholie*. Il seroit facile d'appliquer cette théorie à la recherche de la figure d'une *vessie* gonflée par l'air, d'un *outre* rempli de vin, etc., si l'on connoissoit la loi suivant laquelle s'étendent les fibres dont ces sortes de vases sont composés. Les conditions de l'équilibre s'établissent toujours de la même manière, quelle que puisse être la nature de la surface du vase flexible. La seule difficulté est d'intégrer les équations auxquelles on est conduit. Comme tous les calculs de cette espèce portent sur des principes un peu hypothétiques, et qu'ils n'appartiennent pas proprement à l'Hydrostatique, je ne m'y arrêterai pas davantage.

Le premier problème qu'on ait résolu sur cette matière, est celui d'un vase flexible soumis à la pression d'un fluide pesant : il le fut, en 1692, par les deux illustres frères Jacques et Jean Bernoulli. Depuis ce temps-là, Dan. Bernoulli, Euler et d'autres Géomètres, ont étendu et généralisé les mêmes questions, dans les Mémoires des Académies de Pétersbourg, de Berlin, etc.

CHAPITRE VI.

Des Fluides élastiques, et en particulier de l'équilibre de l'air; principes d'expérience, sur lesquels cet équilibre est fondé.

54. Les fluides élastiques ont, comme fluides, toutes les propriétés de ces sortes de corps; et on peut, à cet égard, leur appliquer les propositions générales que nous avons établies sur l'équilibre des fluides. Mais ils ont de plus d'autres propriétés particulières, dépendantes de la vertu élastique, ou de cette faculté par laquelle ils diminuent ou augmentent de volume, selon qu'ils sont plus ou moins comprimés.

De tous les fluides élastiques, l'air est le plus connu, le plus répandu, l'agent le plus universel dans la Physique et la Mécanique. Nous allons donc examiner ici les propriétés dont il est doué, tant parce qu'il mérite par lui-même cette distinction, que pour fixer les idées, et que d'ailleurs on appliquera facilement la même théorie aux autres espèces de fluides élastiques.

55. Théorème I. *L'air est un fluide pesant.*

En effet, la pesanteur est une force universelle répandue dans la Nature, et il n'y a point de corps qui ne lui soit soumis. Tous les phénomènes ter-

restres et célestes prouvent cette vérité. La pesanteur de l'air, dont il s'agit ici, est démontrée à tous les yeux, par la suspension de la colonne de mercure dans le tube d'un Baromètre.

Les anciens Philosophes ne connoissoient point la pesanteur de l'air. Ils admettoient dans la Nature deux sortes de corps, les corps *pesans*, tels qu'une pierre, un morceau de plomb, et en général tous les corps qui étant abandonnés à eux-mêmes, descendent vers la terre; et les corps *légers*, comme l'air, la flamme, etc,, parce que ces corps semblent s'éloigner de la terre et s'élever dans les parties supérieures : on ignoroit alors que cette ascension est produite, ou par leur élasticité, ou par l'action d'autres corps plus massifs et plus pesans, qui tendent à gagner le bas et à repousser en haut les fluides dont ils viennent occuper la place.

On doit à Galilée l'opinion ou la pensée, que l'air est un fluide pesant; mais son disciple Toricelli est le premier qui ait démontré cette proposition par la voie de l'expérience. Déjà porté à croire, d'après les principes de Galilée, que l'eau s'élevoit dans les pompes en vertu de la pression de l'athmosphère, et jugeant en conséquence qu'un fluide plus dense ou plus pesant que l'eau s'éleveroit moins haut à proportion, dans un tube vide d'air, il prit un tuyau de verre *A B* (*Fig.* 30), d'environ trois pieds de longueur, ouvert par le bout *A*, et fermé par le bout *B*; il le remplit de mercure : ensuite ayant bouché le bout *A* avec le doigt, il renversa le tube,

de manière que le bout B étoit en haut, le bout A en bas, et plongé dans une cuvette MCN qui contenoit déjà du mercure; enfin il retira son doigt, pour abandonner la colonne de mercure à l'action de la pesanteur. Alors, après quelques mouvemens d'oscillation, la colonne de mercure AE, se tint immobile, à la hauteur d'environ 28 pouces au-dessus de la surface du mercure de la cuvette MCN. De-là Toricelli conclut avec raison que la colonne de mercure demeure ainsi suspendue dans le tube, en vertu de la pression de l'air extérieur sur la surface du mercure contenu dans la cuvette MCN, pression qui n'a pas lieu sur la colonne contenue dans le tube dont le bout supérieur B est fermé hermétiquement. En effet, si l'on ouvre ce bout, pour permettre à l'air d'entrer dans le tube, la colonne tombe aussi-tôt et se répand dans la cuvette. Nos Baromètres ordinaires ne sont autre chose que le tube de Toricelli en expérience continuelle. Je n'ai pas besoin de faire observer que la conclusion est la même, soit qu'on suppose que l'air agisse immédiatement par son poids sur la surface du mercure de la cuvette, ou qu'il agisse par son ressort, puisque dans ce dernier cas l'élasticité est produite par la compression ou le poids de l'air supérieur.

56. *Remarque I.* La hauteur du mercure dans le tube du Baromètre est différente et plus ou moins grande, selon que les lieux sont moins ou plus élevés

par rapport à un même niveau, tel, par exemple que celui de la mer. La première expérience de ce genre est celle que Pascal fit exécuter sur la montagne du Puy-de-Dôme, voisine de Clermont en Auvergne. Du pied au sommet de cette montagne, qui est élevée d'environ 500 toises au-dessus de Clermont, le mercure baissa dans le cube de trois pouces une ligne et demie. Nous indiquerons ci-dessous la cause de cette variation.

57. *Remarque II.* Dans un même lieu, la hauteur du mercure dans le Baromètre n'est pas constante : elle change à raison des changemens qui arrivent dans le poids ou le ressort de l'atmosphère, par la pluie, par les vents, etc. Nous reviendrons sur cet objet.

58. *Corollaire I.* L'air étant ainsi pesant, et sa pression sur chaque point de la surface de la Terre étant équivalente au poids d'un filet de mercure, dont je suppose qu'on connaisse la hauteur moyenne, il est facile de trouver le poids de toute la masse d'air qui environne le globe terrestre. Car soient R le rayon du globe terrestre ; r la hauteur donnée du filet de mercure dont on vient de parler ; π le rapport de la circonférence au diamètre ; ϖ la pesanteur spécifique du mercure, c'est-à-dire, par exemple, le poids d'un pied cube de mercure, en prenant le pied cube pour l'unité de volume. On cherchera les solides de deux sphères, dont l'une a pour rayon $R+r$, l'autre R ;

et on retranchera le second solide du premier, ce qui donnera $\frac{4\pi(R+r)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$ ou $4\pi(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3})$ pour reste, qui étant réduit en pieds cubes, et puis multiplié par ϖ, ou par le poids d'un pied cube de mercure, donnera le poids de l'atmosphére.

Dans ce calcul, on peut négliger, pour abréger, les termes qui contiennent r^2 et r^3, comme très-petits par rapport au premier.

Par exemple, soient $r = 28$ pouces; le poids d'un pied cube de mercure $= 980$ livres. Supposons de plus, suivant les observations, que chaque degré d'un grand cercle de la Terre est de 57000 toises. On trouvera, en effectuant les calculs indiqués par la formule $4\pi R^2 r$, que le poids total de l'atmosphère est denviron 11028982149818181818 livres.

59. *Corollaire II.* Deux colonnes, l'une de mercure, l'autre d'eau, qui se font mutuellement équilibre, ont des hauteurs réciproquement proportionnelles à leurs pesanteurs spécifiques (31), en sorte que si la colonne de mercure a 28 pouces de hauteur, celle d'eau doit avoir environ 32 pieds de hauteur. Or, la pression de l'atmosphère contre-balance la première de ces deux colonnes, comme nous venons de le voir; donc elle contre-balancera aussi la seconde. Ainsi, dans le vide, la pression de l'atmosphère doit soutenir une colonne d'eau d'environ 32 pieds de hauteur.

Si vous en voulez directement la preuve par

l'expérience, ayez un tuyau ou corps de pompe vertical *QH* (*Fig.* 31), plongé dans l'eau *MCDN* par le bout *Q* qui est ouvert; faites glisser de bas en haut, le long de ce tuyau, un piston massif *K O*, qui en remplisse exactement la capacité : l'eau montera dans le tuyau, jusqu'à ce qu'elle soit élevée au-dessus du niveau *MN*, d'environ 32 pieds; après quoi elle s'arrêtera, quoique le piston continue de monter. On en voit la raison. Le piston en montant laisse après lui un vide dans lequel l'air extérieur ne peut pas entrer; et la pression libre de cet air sur la surface *M N* du réservoir, force l'eau à passer par l'ouverture *Q*, et à s'élever dans le tuyau. L'eau s'arrête à la hauteur de 32 pieds, parce qu'alors son poids est en équilibre avec la pression de l'atmosphère.

60. *Corollaire III.* Supposons que dans l'expérience précédente, l'eau soit parvenue à sa plus grande hauteur *A B*; qu'ensuite on élève encore le piston, et qu'il se fasse entre la surface *B T* de l'eau et la base du piston, un vide tel que *BP*. Alors, si l'on fait entre les points *A* et *B* une ouverture latérale *E* au tuyau, l'air extérieur entrera avec force par cette ouverture, et divisera en deux parties *A F*, *E T*, la colonne *A T* qui est composée de molécules très-mobiles. La première *A F* retombera, par sa pesanteur, dans le réservoir *MCDN*, parce que la pression de l'air qui entre par *E* est en équilibre avec la pression de l'air qui tend à faire monter l'eau par le bout *Q* du tuyau. Mais la seconde partie *E T* étant

poussée par l'air qui entre par E et qui agit en toutes sortes de sens, de bas en haut comme de haut en bas, montera nécessairement dans l'espace vide BP qui est au-dessus. Il en est de cette élévation de la colonne $E\,T$, comme de la suspension de l'eau contenue dans une bouteille renversée dont le goulot est ouvert. L'eau est soutenue dans la bouteille par la pression de l'air extérieur contre le goulot.

Par-là on explique l'expérience de la pompe de Séville, faite en 1766. Un Ferblantier de cette ville, ayant entrepris de faire monter l'eau à la hauteur de 60 pieds, par le moyen d'une pompe aspirante ordinaire, et ne pouvant réussir à obtenir cet effet, donna de dépit un coup de marteau au tuyau d'aspiration, et y fit un trou d'environ une ligne de diamètre, à 10 pieds au-dessus du réservoir. Alors l'eau monta rapidement à la hauteur de 60 pieds. En continuant de pomper, le trou latéral étant fermé, puis d'ouvrir ce trou, ainsi de suite alternativement, on formera un jet d'eau intermittent, à une hauteur qui pourroit excéder considérablement 60 pieds, comme on le verra ci-dessous. Cette expérience a été répétée et variée de plusieurs manières en France; on y a subsitué du mercure à l'eau, afin de pouvoir employer des tuyaux plus courts et faciliter les manœuvres. (*Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris*, *an* 1766, page 431).

Les pompes de cette espèce, et toutes celles qui tiennent au même principe, ont l'inconvénient de demander une mécanique particulière pour la ma-

nœuvre du robinet destiné à fermer et à ouvrir le trou E, et de donner (à force motrice égale) moins d'eau que les pompes ordinaires. On conçoit en effet qu'à l'air déjà contenu dans la colonne d'eau $E\ T$, il se mêle encore des globules provenans de celui qui entre par l'ouverture E; que tout cet air, par sa force expansive qui agit en tous sens, détache une partie de la colonne d'eau ET, et la livre à l'action de la pesanteur dirigée de haut en bas; et que cet effet, nuisible au produit de la pompe, sera d'autant plus sensible, que la pompe aura un plus grand diamètre.

61. *Corollaire IV.* Soit $ABHO$ (*Fig.* 32), un siphon recourbé et composé de deux branches d'inégale longueur; qu'on plonge la plus courte BA dans la liqueur CN d'un tonneau CD, et qu'on ôte l'air contenu dans l'intérieur du siphon, en le suçant par le bout O: alors la liqueur du tonneau montera dans le siphon et sortira par le bout O, pourvu que ce bout soit au-dessous de la surface MN de la liqueur du tonneau.

Ce phénomène est le même que celui du Baromètre. En effet, imaginons que le bout O du siphon est plongé dans un vase $E\ F$ qui contient de la liqueur. On voit que chacune des parties AB, OH du siphon peut être regardée comme un tube particulier, pareil à celui de Toricelli. Ainsi en représentant la pression de l'athmosphère par $K\ X$, le poids de la colonne fluide AB par KV, celui de la colonne

colonne HO par KZ; il est clair que VX exprime la force qui soulève le fluide dans le tuyau AB, et que ZX exprime la force qui tend à soulever le fluide dans le tuyau OH. Or, comme ces deux dernières forces sont contraires, la plus foible est détruite; et ZV est la force restante qui produit l'écoulement dans le sens $ABHO$.

On voit par-là, 1°. que si $KV=KZ$, il ne peut pas y avoir d'écoulement. 2°. Que si le poids de la plus courte branche est plus grand que celui de l'atmosphère, il n'y aura pas d'écoulement, parce qu'alors la pression de l'atmosphère n'a pas la force suffisante pour soulever la liqueur jusqu'en B. Ainsi, par exemple, si la liqueur est de l'eau, il faut que la hauteur de la plus courte branche AB soit de moins de 32 pieds; pour le mercure, AB doit être moins de 28 pouces, etc.

62. *Remarque.* Ce mécanisme du siphon recourbé, à branches inégales, sert à expliquer le jeu de certaines fontaines *intermittentes* ou *réciproques*.

On sait, en général, que les fontaines et les rivières ont leurs sources dans de vastes réservoirs d'eaux, creusés par la Nature dans l'intérieur et au pied des montagnes, lesquels sont alimentés par les eaux pluviales qui tombent sur la croupe de la montagne et dans les environs, et qui pénètrent par les crevasses du terrein jusqu'au réservoir, d'où elles s'écoulent pour former la fontaine, la rivière, etc. Si les eaux pluviales recueillies dans le réservoir

sont en quantité suffisante pour fournir toujours à cette dépense, le cours de la fontaine ou de la rivière sera continuel; sinon il sera intermittent et subordonné aux temps de pluie et de sécheresse. Mais les fontaines réciproques dont il est ici question, ont une autre cause.

Soit *MANE* (*Fig.* 33), un réservoir placé au pied d'une montagne, et nourri par les eaux pluviales; à la place du produit de ces eaux, je substitue, par la pensée, celui d'un tuyau *KS*, qui en verseroit la même quantité par l'ouverture *S* dans le réservoir *MANE*. Supposons que les eaux de ce réservoir s'échappent par l'endroit *A*, d'où part une décharge *ABHO*, semblable à un siphon recourbé, dont la plus petite branche est *AB*, comme dans la *Figure* 32. L'eau versée par le tuyau *KS* dans le réservoir *MANE*, s'y élèvera successivement; elle montera aussi dans le tuyau *AB*, d'où elle chassera l'air: quand son niveau *MN* sera arrivé à la hauteur du point *B*, elle s'écoulera par la branche *BHO*; et on voit que cet écoulement seroit continuel, si la quantité d'eau fournie par *KS* étoit supérieure ou au moins égale à la quantité débitée par *HO*. Mais supposons que la première quantité soit inférieure à la seconde; alors le niveau *MN* s'abaisse progressivement, et néanmoins l'écoulement par *HO* continue d'avoir lieu, comme celui du siphon de la *Figure* 32, tant que l'eau couvre le trou *A*; mais quand le trou *A* est enfin découvert, et quand l'air s'est introduit par ce trou dans

le siphon $ABHO$, l'écoulement en O cesse. Mais le tuyau KS continuant à verser de l'eau dans le réservoir, elle s'y élève de nouveau à la hauteur du point B; d'où résulte un nouvel écoulement semblable au premier, et qui finit de même; ainsi de suite. Le cours de la fontaine est donc intermittent ou réciproque.

On voit que ces sortes de fontaines peuvent être susceptibles de plusieurs variétés, par la combinaison de plusieurs réservoirs et de plusieurs siphons recourbés.

63. Théorème II. *L'air est un fluide élastique.*

Qu'on prenne une vessie et qu'on la gonfle en y introduisant de l'air, on aura un ballon qui se comprime lorsqu'on le presse, et qui se dilate lorsqu'on cesse de le presser. Donc, etc.

64. Théorème III. *La force élastique de l'air comprimé est égale à celle qui produit la compression.*

La fontaine de *Héron* en fournit la preuve. Cette machine (*Fig.* 34), qu'on fait ordinairement avec du fer-blanc, est composée d'une caisse $ABCD$, fermée de tous côtés, pleine d'eau jusqu'en EF, un peu au-dessous de AB; d'une autre caisse $GHKI$, aussi fermée de tous côtés, égale à la première, et pleine d'air; d'un tuyau OT soudé exactement avec les platines AB, DC, GH, lequel communique au-dehors par le bout O, et avec la caisse inférieure par le bout T qui est très-près du fond IK; d'un tuyau XY soudé aux deux caisses, et

dont le bout supérieur X est près du fond AB; d'un tuyau QP dont le bout inférieur P est proche le fond DC, et le bout supérieur Q, soudé avec le fond AB, est garni d'un ajutage. Cela posé, fermez l'ajutage Q avec le doigt, ou avec un robinet; versez un peu d'eau par le bout O du tuyau OT; elle descendra jusqu'en IK, et montera, par exemple, en VS. Alors il n'y aura plus aucune communication de l'air extérieur avec celui qui reste dans les deux caisses Continuez à verser de l'eau; l'air contenu dans les espaces $GHSV$, XY, $ABFE$, se condensera peu-à-peu jusqu'à ce que sa force élastique soit en équilibre avec la pression de l'eau versée par OT. Si la surface de l'eau dans la caisse $GHKI$ est MN, l'air dont on vient de parler pressera perpendiculairement chaque partie de la surface qui l'environne avec une force égale au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base la partie pressée, et OL pour hauteur. Ainsi la surface EF de l'eau contenue dans la caisse supérieure, est poussée de haut en bas par ce même air, et l'eau tend à s'élever par le tuyau PQ; de sorte que si on vient à ouvrir l'ajutage, il sortira un jet d'eau qui s'élévera à la hauteur RZ égale à OL. Cette hauteur produite par le ressort de l'air, est celle que produiroit le poids de la colonne OL, comme on le verra dans l'Hydraulique.

On peut remarquer qu'en faisant rentrer par O l'eau qui tombe du jet, cette eau passe dans la caisse inférieure, et que par conséquent le jet durera

jusqu'à ce que toute l'eau comprise depuis le point P jusqu'en EF soit sortie en jaillissant.

65. Théorème IV. *L'air se comprime lui-même par son propre poids.*

Car l'air étant un fluide pesant, si l'on conçoit l'atmosphère partagée en une infinité de tranches, ou plutôt de couches perpendiculaires à la direction de la pesanteur, il est évident que les couches inférieures seront chargées du poids des supérieures; d'où résultera nécessairement une compression qui sera plus grande, toutes choses d'ailleurs égales, à mesure que la couche comprimée sera placée plus bas dans l'atmosphère.

Je dis *toutes choses d'ailleurs égales,* car il y a d'autres causes, comme le froid et le chaud, qui concourent à comprimer et à dilater l'air. La densité de ce fluide est extrêmement variable; elle est environ huit ou neuf cents fois moindre que celle de l'eau ordinaire. Le rapport moyen de ces densités, dans nos climats, peut s'exprimer sensiblement par la fraction $\frac{1}{850}$.

66. *Corollaire.* De-là et de l'article 64, il suit que si l'air, après s'être comprimé lui-même par son propre poids, vient à agir par son seul ressort, il produira le même effet qu'il produisoit par son poids. Cela est confirmé par l'expérience que voici.

Prenez une bouteille de verre $ABCD$ (*Fig.* 35), de figure cylindrique; versez-y du mercure $AEFD$; faites-y entrer un petit tuyau de verre K, de 29 ou

30 pouces de hauteur, ouvert par les deux bouts, et dont celui d'en bas trempe de quelques lignes dans le mercure; scellez ce tuyau exactement au col de la bouteille, de manière que l'air contenu dans l'espace *EBCF* n'ait aucune communication avec l'air extérieur; mettez ensuite cette bouteille et son tuyau sous le récipient *LIHM* de la machine pneumatique; pompez, autant qu'il sera possible, l'air contenu dans ce récipient : alors le mercure s'abaissera en *NO*, et il s'élèvera dans le tuyau au-dessus de *NO*, à peu-près à la même hauteur qu'il se soutient dans le Baromètre, dans l'endroit où l'on fait l'expérience. La raison en est évidente; car avant que de commencer à faire le vide dans la machine pneumatique, l'air contenu dans l'espace *EBCF* est dans le même état que l'air extérieur; lorsqu'ensuite on vient à faire le vide sous le récipient, le même air *EBCF* déploie son ressort, force en conséquence le mercure à s'abaisser en *NO* et à monter dans le tuyau vide; et cette ascension est à peu-près égale à celle qui est produite dans le Baromètre par le poids de l'air. Je dis *à peu-près*, parce qu'il n'est jamais possible de vider parfaitement d'air le récipient de la machine pneumatique.

67. Théorème V. *Si l'on comprime une même masse ou quantité d'air, et qu'on la réduise à occuper différens espaces ou volumes, ces volumes seront entr'eux en raison inverse des forces comprimantes.*

Cette proposition se prouve par l'expérience suivante, qui est très-connue des Physiciens, et que Mariotte a faite le premier.

Soit *ABC* (*Fig.* 36), un tuyau de verre recourbé, fermé hermétiquement par le bout *C*, et ouvert par le bout *A*. Les deux branches *DA*, *EC* sont verticales; mais la branche *DE* de jonction est horizontale. On donne ordinairement trois ou quatre lignes de diamètre intérieur à ce tuyau. La petite branche *EC* doit être parfaitement cylindrique pour pouvoir comparer exactement entr'eux les différens volumes de la masse d'air qu'on y condense. Nous supposons qu'elle ait 12 pouces de hauteur; l'autre *DA* est beaucoup plus haute. Versez légèrement dans le tube un peu de mercure pour remplir la branche horizontale, et faites en sorte que les deux surfaces *DV*, *IE* de ce fluide, dans les deux branches verticales, soient de niveau, afin que l'air enfermé dans l'espace *EC* soit dans le même état que l'air extérieur; car il est évident que si le ressort de l'air intérieur *EC* étoit plus ou moins tendu que celui de l'air extérieur, les surfaces *IE*, *DV* seroient inégalement pressées, et que par conséquent elles ne pourroient pas être de niveau. Continuez ensuite à verser du mercure dans la branche *DA*; et vous verrez qu'à mesure qu'il s'élèvera en *H*, la surface *EI* s'élèvera en *F*. En supposant que la pression de l'atmosphère soit équivalente au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de

hauteur, vous trouverez que si, ayant mené l'horizontale FG, la hauteur $GH = 14$ pouces, la hauteur FC de l'espace occupé par l'air sera $= 8$ pouces; si $GH = 28$ pouces, FC sera $= 6$ pouces, etc. Or il suit de-là que les différens volumes de l'air enfermé d'abord dans EC, suivent la raison inverse des poids comprimans; car au premier instant où cet air ne supporte que la pression de l'atmosphère, il peut être regardé comme chargé du poids d'une colonne de mercure, haute de 28 pouces; lorsqu'on met ensuite dans la branche DA, du mercure à la hauteur de 14 pouces au-dessus de la ligne de niveau FG, la pression que souffre notre masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure, qui a 28 pouces + 14 pouces, ou 42 pouces de hauteur; lorsque la hauteur du mercure dans la branche DA, au-dessus de FG, est 28 pouces, la pression de la même masse d'air est égale au poids d'une colonne de mercure qui a 28 pouces + 14 pouces + 14 pouces, ou en tout 56 pouces, de hauteur, etc. D'où l'on voit que les poids comprimans étant représentés par les nombres 28, 42, 56, les volumes de la masse d'air sont exprimés par les nombres 12, 8, 6. Or, on a ces différentes proportions, $12 : 8 :: 42 : 28$; $12 : 6 :: 56 : 28$; $8 : 6 :: 56 : 42$. Donc les volumes suivent la raison renversée des poids comprimans.

On fera des raisonnemens analogues pour des hauteurs de mercure qui suivroient tout autre rapport dans les deux branches du tube; et ces

raisonnemens, fondés sur l'expérience, aboutiront à la même conclusion finale.

Toutes ces expériences doivent être faites de manière que l'air enfermé en EC ait la même température que l'air extérieur, et que par conséquent son volume ne varie qu'à raison des poids comprimans. Sans cette précaution, le chaud et le froid n'agissant pas de même sur les deux airs, changeroient les résultats, et il seroit difficile de séparer, par une méthode sûre et non hypothétique, leurs effets d'avec ceux des poids comprimans.

68. *Corollaire I.* Puisque la force élastique de l'air est égale à la force qui le comprime (64), il s'ensuit que les différentes forces élastiques d'une même masse d'air, à laquelle on fait occuper différens volumes, sont en raison inverse de ces volumes.

69. *Corollaire II.* On voit par l'article V des *Notions générales*, que sous même masse, les densités sont en raison inverse des volumes. Ainsi, quand une même masse d'air occupe successivement différens volumes, les forces qui la compriment, ou les forces élastiques qu'elle a en conséquence, sont proportionnelles à ses densités dans ces différens états. Il existe donc toujours, pour une même masse d'air, cette loi générale entre les volumes, les forces élastiques et les densités, que les volumes venant à diminuer ou à augmenter, par un moyen quelconque, les forces élastiques et les densités augmentent ou diminuent proportionnellement.

70. *Corollaire III.* Par-là on trouve la loi que suivent les dilatations de l'air dans la machine pneumatique.

On sait que les principales pièces de la machine pneumatique ordinaire, dont il est ici question, et à laquelle on peut rapporter toutes les autres, sont le récipient, la platine, le corps de pompe, le piston qui se hausse et se baisse le long du corps de pompe, et un robinet percé de manière qu'étant tourné dans un certain sens, il permet la communication du récipient avec le corps de pompe, sans la permettre avec l'air extérieur; et qu'étant tourné dans un autre sens, il permet la communication de l'air extérieur avec le corps de pompe, sans la permettre avec le récipient.

Cela posé, nous pouvons résoudre le problême suivant :

71. Problême. *Former une équation entre la somme* A *des capacités du récipient et de la partie supérieure du corps de pompe qui demeure vide lorsque le piston est haussé; la somme* B *des capacités du récipient et du vide du corps de pompe, lorsque le piston est baissé; le nombre* n *de fois qu'on fait jouer le piston; le rapport* $\frac{m}{1}$ *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur et raréfié après le nombre* n *de coups de piston.*

Supposons qu'au premier instant le piston soit haussé, le robinet ouvert en dehors et fermé du côté du récipient; qu'alors on applique le récipient

sur la platine. Il est clair qu'en ce moment, la densité de l'air contenu dans l'espace A est la même que celle de l'air extérieur; je la représente par D. Maintenant si l'on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient, et qu'on baisse le piston; l'air contenu dans l'espace A se dilatera en vertu de sa force élastique, et se répandra uniformément dans l'espace B. De plus, la densité qu'il aura dans l'espace B, sera à la densité qu'il avoit dans l'espace A, réciproquement comme A est à B, puisque la masse demeure la même. Faisant donc cette proportion $B : A :: D$: un quatrième terme; ce quatrième terme $D \times \frac{A}{B}$ exprime la densité de l'air intérieur après le premier coup de piston. Pareillement, si après avoir fermé le robinet du côté du récipient, ouvert le robinet en dehors et élevé le piston, on ferme le robinet en dehors, qu'on l'ouvre du côté du récipient et qu'on abaisse une seconde fois le piston, l'air contenu dans l'espace A, et dont la densité est $D \times \frac{A}{B}$, se répandra dans l'espace B, de manière que faisant cette proportion, $B : A :: D \times \frac{A}{B}$: un quatrième terme, ce quatrième terme $D \times \frac{A^2}{B^2}$ exprime la densité de l'air intérieur, après le second coup de piston. En continuant à raisonner de même, on voit que la densité de l'air intérieur après le troisième coup

de piston, est exprimée par $D \times \frac{A^5}{B^5}$; que la densité après le quatrième coup de piston est exprimée par $D \times \frac{A^6}{B^6}$; et qu'après le nombre n de coups de piston la densité est exprimée par $D \times \frac{A^n}{B^n}$. On aura donc, par hypothèse, cette proportion $D : D \times \frac{A^n}{B^n} :: m : 1$; d'où l'on tire $m \times A^n = B^n$, qui est l'équation demandée.

En prenant les logarithmes de chaque nombre, on aura log. $(m \times A^n) =$ log. B^n, ou bien,

Log. $m + n$. log. $A = n$. log. B.

72, *Corollaire*. De-là il suit que si parmi les quatre quantités m, n, A, B, on en connoît trois quelconques, on pourra trouver la quatrième. Sur quoi néanmoins il faut observer que n étant regardé comme un nombre entier dans le calcul précédent (autrement les valeurs de A ou de B ne pourroient pas être constantes, comme elles sont supposées l'être), il faut que la valeur que l'on donnera ou que l'on trouvera pour n soit toujours un nombre entier, ou exactement, ou au moins sensiblement.

Question I. *Connoissant les capacités* A *et* B, *le nombre* n *de coups de piston, trouver le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur ?*

L'équation précédente donne celle-ci log. $m = n \times$ (log. B — log. A).

Par exemple, soient $A = 5$, $B = 7$, $n = 10$: on trouvera log. $m = 1{,}46128$, et par conséquent $m =$ 29 environ.

II. *Connoissant le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piston, la capacité* A, *trouver la capacité* B?

Cette question se résout par l'équation $\log. B = \frac{\log. m + n \log. A}{n}$.

Par exemple, soient $m = 29$, $n = 6$, $A = 5$; on trouvera log. $B = 0{,}94270$, et par conséquent $B = 9$ environ.

III. *Connoissant le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, le nombre* n *de coups de piston, la capacité* B, *trouver la capacité* A?

Cette question se résout par l'équation $\log. A = \frac{n \log. B - \log. m}{n}$.

Par exemple, soient $m = 29$, $n = 9$, $B = 7$; on trouvera log. $A = 0{,}68261$, et par conséquent $A = 5$ environ.

IV. *Connoissant les capacités* A *et* B, *le rapport* m *de la densité de l'air extérieur à celle de l'air intérieur, trouver le nombre* n *de coups de piston.*

Cette question se résout par l'équation $n = \frac{\log. m}{\log. B - \log. A}$.

Par exemples, soient $A = 3$, $B = 4$, $m = 10$; on trouvera $n = 8 +$ une fraction très-petite qu'on pourra négliger sans erreur sensible. De sorte que le nombre demandé de coups de piston est à très-peu de chose près le nombre entier 8. Si, au lieu de $m = 10$, on avoit $m = 9{,}9885$, la valeur de n seroit 8 presque en toute rigueur.

73. *Scholie.* Le même principe que *l'air se comprime suivant la proportion des poids dont il est chargé*, sert à expliquer l'équilibre des pompes, comme je l'expliquerai dans les deux chapitres suivans. Mais avant que d'entrer dans ce détail, il est à propos de faire ici quelques observations générales sur la proposition dont il s'agit, et sur les conséquences qui en résultent.

Cette proposition ne peut pas être vraie à la rigueur, pour toutes sortes de condensations; et les expériences d'après lesquelles on l'a établie, ne la prouvent que pour des condensations ou des dilatations de l'air d'une *moyenne* étendue.

En effet, imaginons d'abord que la compression augmente à l'infini : il faudroit que la condensation augmentât de même, et qu'enfin l'air n'occupât plus qu'un espace infiniment petit. Or, quelque figure qu'on attribue aux molécules aériennes; il est clair que lorsque leurs ressorts ont été comprimés jusqu'à ce que toutes leurs parties se touchent, l'impénétrabilité mutuelle de ces parties ne permet plus de compression. Ajoutez que l'air peut être mêlé de

parties dures, dénuées de ressort, ou douées d'un ressort très-imparfait. Si au contraire on suppose que la compression diminue à l'infini, on ne peut pas supposer de même que l'air se dilate à l'infini; car le ressort parfait ou imparfait des molécules aériennes, ne peut avoir qu'une extension déterminée, et jamais une masse finie ne peut occuper un espace infini. Il n'est donc pas possible, en rigueur, que les condensations de l'air suivent généralement le rapport des poids comprimans. Mais comme les forces comprimantes que nous pouvons employer dans nos expériences, ne passent jamais certaines limites, le principe posé peut être admis comme vrai, sans restriction, dans cette hypothèse, qui est applicable à une foule de recherches et en particulier au méchanisme des pompes.

CHAPITRE VII.

Élémens de la Statique des Pompes.

74. ON fait un si grand usage des pompes, que je crois devoir expliquer avec quelque détail la théorie de l'équilibre de ces machines.

Les pompes, en général, sont des tuyaux destinés à élever l'eau à une certaine hauteur, au moyen d'un principe moteur quelconque qui met en jeu le poids ou le ressort de l'air, et qui fait servir ce poids ou ce ressort de véhicule à son action sur l'eau qu'il s'agit d'élever.

Il y a trois espèces principales de pompes : la pompe *aspirante*, la pompe *foulante*, et la pompe qui est tout-à-la-fois *aspirante* et *foulante*. Toutes les machines de cette espèce ne sont que des combinaisons des trois qu'on vient de nommer, comme dans la mécanique ordinaire les machines composées ne sont que des combinaisons des sept machines simples et primordiales.

Pompe aspirante.

75. La pompe aspirante ordinaire (*Fig.* 37) est composée de deux tuyaux verticaux $AMNC$, $ABDC$, qui ont le même axe, et qui s'assemblent en AC. Le premier, qui trempe dans l'eau d'un puits

puits ou d'un amas d'eaux quelconque, s'appelle *tuyau d'aspiration*; le second se nomme *corps de pompe*. En AC est une cloison ou *diaphragme* percé d'un trou, couvert par une *soupape E* qui s'ouvre de bas en haut. Dans le corps de pompe, monte et descend alternativement un piston, dont la tige Z est mue par un levier, ou de toute autre manière qu'on voudra. La tête de ce piston est percée dans la direction de son axe, d'un trou, couvert par une soupape F qui s'ouvre de bas en haut. Il parcourt dans son jeu un certain espace, dont je suppose que GK est la hauteur, c'est-à-dire, que le piston étant baissé, sa base inférieure est dans le plan horizontal GH, et qu'étant haussé, cette même base est dans le plan horizontal KI. La limite inférieure GH de la course du piston, doit être le plus près qu'il est possible de la soupape E.

On voit que des deux soupapes E et F, qui d'ailleurs s'ouvrent et se ferment alternativement de la même manière, la première E occupe toujours la même place (on l'appelle, par cette raison, soupape *dormante*); et la seconde F est *mobile* avec le piston qui la porte.

La pression de l'atmosphère dans un même endroit est sujette à quelques variations, comme nous le dirons plus expressément ci-dessous; mais dans tout ce petit traité des pompes, nous la regardons comme une force constante, en l'évaluant sur le pied de sa quantité moyenne. Cette quantité est

à peu-près équivalente, dans nos climats, au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, ou au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur.

76. Problème I. *Expliquer le jeu de la pompe aspirante.*

Je suppose qu'au premier instant, la base du piston soit en GH. Alors l'air compris dans l'espace MC, l'air compris dans l'espace AH, et l'air naturel ou l'air de l'atmosphère, dans l'endroit où est la machine, ont la même densité, la même force élastique, les deux soupapes E et F étant supposées permettre, par la liberté qu'elles ont de s'ouvrir et de se fermer, la communication des trois airs dont il s'agit; après quoi ces deux soupapes se ferment par leurs poids. Maintenant, élevez le piston de GH en KI : la soupape F demeure fermée par son poids et par la pression de l'air supérieur; l'air MC et l'air AH se dilatent; le premier, par sa force d'expansion, fait ouvrir la soupape E; ces deux airs se mêlent ensemble, et ne forment plus qu'un même air, dont la force élastique diminuant en même raison que l'espace dans lequel il se répand, augmente (68), ne peut plus faire équilibre à la pression de l'air extérieur sur la surface MN du réservoir; par conséquent, cette dernière force doit faire monter l'eau dans le tuyau d'aspiration, d'une certaine quantité Mx, tandis que le piston monte de GH en KI. La hauteur

Mx est telle que le poids de la colonne d'eau Mu, joint à la force élastique de l'air affoibli, répandu dans l'espace xI, et au poids de la soupape E, est en équilibre avec la pression de l'air extérieur. Quand le piston est parvenu en KI, la soupape E retombe par son poids et isole l'air compris dans l'espace xC; et la colonne d'eau Mu demeure toujours suspendue à la même hauteur Mx. Abaissez le piston de KI en GH: l'air affoibli, compris dans l'espace AI, s'appuie par son ressort qui agit en tout sens, contre la soupape E qu'il tient fermée, et contre la soupape F qu'il force à s'ouvrir; l'air affoibli, compris depuis AC jusqu'à la base inférieure du piston, coule par le trou F, et se mêle avec l'air extérieur. Cet effet dure jusqu'à ce que le piston soit parvenu en GH; ensuite la soupape F se ferme. Élevez le piston de GH en KI: la soupape F demeure fermée, la soupape E s'ouvre, et l'eau monte encore d'une certaine quantité xy, dans le tuyau d'aspiration; ainsi de suite. D'où l'on voit, qu'après un certain nombre de coups de piston, l'eau arrivera dans le corps de pompe, et sortira, ou par l'extrémité supérieure de ce tuyau, ou par un tuyau O implanté au corps de pompe. Cet écoulement durera tant que l'on continuera de faire jouer le piston.

On voit que le jet d'eau n'est pas continu, et qu'il a lieu seulement, ou peut être censé avoir lieu pendant que le piston monte.

F ij

77. *Remarque*. Il faut observer, qu'en négligeant même le poids de la soupape E, et en supposant qu'on pût faire dans le tuyau d'aspiration le même vide que dans la partie supérieure du tube du Baromètre, la hauteur AM doit être moindre que la hauteur de la colonne d'eau, qui feroit équilibre à la colonne de mercure du Baromètre, dans l'endroit où la pompe joue: et cela, afin que l'eau puisse arriver en AC, et passer dans le corps de pompe. Ainsi la hauteur de la colonne de mercure étant supposée de 28 pouces, la hauteur AM doit être moindre que 32 pieds. Cette condition étant une fois remplie, la hauteur LV de la surface BD de l'eau dans le corps de pompe, au-dessus de la surface MN de l'eau du réservoir, peut être plus grande que la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphère; ce qui donne la liberté de placer le dégorgeoir O à une hauteur arbitraire; mais, à cet égard, il faut prendre garde que la tige Z du piston, se mouvant dans le corps de pompe $ABDC$, la hauteur AB de ce tuyau ne doit pas être trop grande; autrement la tige Z seroit exposée à se fausser.

78. *Corollaire*. Le produit de la pompe, c'est-à-dire, la quantité d'eau qu'elle verse par le dégorgeoir O, pendant un tems donné, se détermine en considérant qu'à chaque coup de piston il sort par ce dégorgeoir un volume d'eau équivalent à un cylindre d'eau GI.

79. Problème II. *Déterminer la force qu'il faut employer à chaque instant pour vaincre la résistance que le piston trouve à monter.*

Nommons h la hauteur LV de la surface de l'eau dans le corps de pompe au-dessus du niveau MN du réservoir ; a^2 l'aire de la section circulaire GH; et F l'effort de l'eau sur la tête du piston pour le faire descendre. En quelque endroit gh de sa course que le piston soit parvenu, je dis qu'on aura constamment $F = a^2 \times h$. Car soit VS la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphère; et supposons que le piston, en montant, soit parvenu dans la position quelconque gh, à laquelle répond la hauteur rV : il est clair, 1°. que le piston est poussé de haut en bas par la pression de l'atmosphère, qui produit un effort $= a^2 \times VS$, et par la pression de la colonne d'eau gD, qui produit un effort $= a^2 \times rL$. De sorte qu'en tout le piston est poussé de haut en bas, avec une force $= a^2 \times VS + a^2 \times rL$. 2°. Le piston est poussé de bas en haut par la pression de l'atmosphère sur la surface MN du réservoir, qui produit un effort $= a^2 \times VS$; cet effort est détruit en partie par le poids de la colonne d'eau qui a pour base le cercle gh ou GH, et pour hauteur, rV. De sorte qu'en tout, le piston est poussé de bas en haut, avec une force $= a^2 \times VS - a^2 \times rV$. Par conséquent on a $F = (a^2 \times VS + a^2 \times rL) - (a^2 \times VS - a^2 \times rV)$; ce qui se réduit à $F =$

$a^2 \times LV = a^2 \times h$; c'est-à-dire, que *le piston soutient continuellement en montant, un effort égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base le cercle de la tête du piston, et pour hauteur celle de la surface de l'eau dans le corps de pompe au-dessus de la surface du réservoir.*

Ainsi pour faire monter à chaque instant le piston, il faudra employer une force qui soit égale à l'effort qu'on vient de déterminer, plus au poids du piston dans l'eau, plus à la résistance du frottement du piston contre les parois du corps de pompe.

Lorsque la course du piston de bas en haut est achevée et qu'il vient à descendre, il descend par son poids dans l'eau : il n'a pas alors d'autre résistance à vaincre que le frottement et un petit choc contre l'eau.

Pompe foulante.

80. On voit (*Fig.* 38) une pompe foulante. Le corps de pompe *ABDC* trempe dans l'eau d'un réservoir dont la surface est *MN*; le piston entre par en bas, et soulève ou *foule* l'eau; sa tige *Z* est solidement fixée à un chassis mobile *TYX* qu'on fait monter et descendre alternativement par le moyen d'un levier, ou de toute autre manière; sa tête est percée d'un trou couvert par une soupape *F* qui s'ouvre de bas en haut. En *AC*, un peu au-dessous de la surface *MN* de l'eau du réservoir, est un diaphragme percé d'un trou couvert par une soupape *E* qui s'ouvre de bas en haut. Le corps de

pompe s'unit en *AC* avec le tuyau montant *ACV* qui porte l'eau à l'endroit où l'on veut l'élever.

81. Problème I. *Expliquer le jeu de la pompe foulante.*

Supposons qu'au premier instant la tête du piston soit placée en *KI*, qui est la limite la plus basse de sa course. Alors le corps de pompe est rempli d'eau; et cette eau est de niveau avec celle du réservoir, les deux soupapes *E* et *F* permettant, par leur mobilité, la communication des eaux; ensuite ces deux soupapes se ferment par les pesanteurs qui leur restent dans le fluide. Élevez le piston de *KI* en *GH*, qui est la limite supérieure de sa course: la soupape inférieure *F* demeure fermée, la soupape *E* s'ouvre, et l'eau contenue dans l'espace *KH* s'élève au-dessus de *GH*, et passe dans le tuyau montant; de plus, pendant que le piston monte, il est suivi par l'eau qui entre du réservoir dans le corps de pompe. Abaissez le piston de *GH* en *KI*: la soupape *F* s'ouvre, et la soupape *E* se ferme et empêche l'eau qui est au-dessus de descendre : élevant une seconde fois le piston, la soupape *F* se ferme, la soupape *E* s'ouvre, et l'eau continue de s'élever dans le tuyau montant *ACV*; ainsi de suite. On voit que par le jeu réitéré du piston, l'eau s'élève de plus en plus dans le tuyau *ACV*, et finit par arriver à la hauteur desirée.

L'élévation de l'eau est intermittente, comme dans la pompe de la première espèce.

82. *Remarque.* La hauteur du tuyau montant n'est pas limitée ici, comme pour la pompe aspirante, parce que la tige Z du piston est au-dehors de ce tuyau. On donne à cette tige la longueur simplement nécessaire pour le jeu du piston, et pour venir gagner la traverse inférieure du chassis TYX.

83. *Corollaire.* Il est clair que cette pompe donne une quantité d'eau équivalente au cylindre KH, pendant le temps que le piston monte de KI en GH.

84. Problème II. *Déterminer la force qu'il faut employer à chaque instant pour faire monter le piston.*

En raisonnant comme pour la pompe foulante, on verra que le piston, en montant, soutient ici de la part de l'eau un effort égal au poids d'une colonne qui auroit pour base le cercle de la tête du piston, et pour hauteur la verticale comprise depuis la surface de l'eau du réservoir jusqu'à la surface de l'eau dans le tuyau montant. A quoi il faut ajouter le poids du chassis TYX, celui du piston dans l'eau, et le frottement contre les parois du corps de pompe.

Le piston descend par la pesanteur; il est retardé par le frottement et par un petit choc contre l'eau.

Pompe aspirante et foulante.

85. Une pompe qui est tout-à-la-fois aspirante et foulante, peut l'être de deux manières représentées par les *Figures* 39 *et* 40. Dans la première, le piston

aspire en montant et foule en descendant; dans la seconde, le piston aspire en descendant et foule en montant.

86. Problème I. *Expliquer le jeu de la pompe aspirante et foulante, dans l'un et l'autre cas.*

I. Soit la pompe aspirante et foulante de la *Fig.* 39. Cette machine est composée d'un tuyau d'aspiration *AMNC* qui trempe dans l'eau *MN* d'un réservoir; d'un corps de pompe *ABDC*, dans lequel le piston *P* se meut comme ci-dessus; et d'un tuyau montant *CQV*. En *AC* et *QR* sont deux soupapes, ou deux clapets à charnières, qui s'ouvrent de bas en haut. Le piston joue dans l'étendue *GK*; sa tête est massive, et n'est pas percée comme dans les deux cas précédens. On voit qu'en le faisant monter et descendre alternativement, l'eau s'élève d'abord dans le tuyau d'aspiration et dans le corps de pompe, comme dans la pompe aspirante ordinaire, avec cette différence que maintenant l'air s'échappe par le tuyau montant, et non par la tête du piston. Les mouvemens alternatifs des deux soupapes *E* et *F* sont absolument les mêmes dans les deux cas. L'eau arrive, après quelques coups de piston, dans l'espace vide que ce même piston en s'élevant occasionne dans le corps de pompe. Ensuite le piston en descendant la foule et la fait passer dans le tuyau montant *CQV*. Élevant le piston, il aspire de nouvelle eau qu'il foule en descendant; ainsi de suite.

II. Dans la pompe de la *Figure* 40, le piston est

aussi massif. En le faisant descendre, l'eau s'élève successivement dans le tuyau d'aspiration $AMNC$; et après un certain nombre de coups, elle arrive au tuyau montant QRV, où elle s'élève successivement, lorsque le piston monte. Le jeu alternatif des soupapes E et F est absolument le même que dans l'autre pompe.

Il est clair que la remarque de l'article 77 doit s'appliquer ici à nos deux pompes.

87. *Corollaire.* Le produit de la pompe s'estime toujours d'après le cylindre d'eau KH, qui sort pendant le temps que le piston emploie à s'abaisser ou à monter de KI en GH.

88. Problème II. *Déterminer la force qu'il faut employer à chaque instant pour faire mouvoir le piston, dans l'une et l'autre pompe.*

I. Soit la pompe de la *Figure* 39. Supposons que la tête du piston soit dans la position gh, à laquelle répond la hauteur verticale gM au-dessus de l'eau du réservoir. Soient MS la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphère, et ML la hauteur entière à laquelle l'eau est élevée. Nommons a^2 l'aire du cercle gh; h la hauteur gM; H la hauteur gL; P le poids du piston et de son équipage; X la force qui pousse le piston de bas en haut, ou pendant l'aspiration, en faisant abstraction du frottement; Y la force qui pousse le piston de haut en bas, ou pendant le refoulement, toujours abstraction faite du frottement. Cela posé,

1°. le piston parvenu en gh étant supposé monter, ou aspirer l'eau, et par conséquent, la soupape F étant fermée, il est clair que $X = P + a^2 \times SM - (a^2 \times SM - a^2 \times gM) = P + a^2 \times gM = P + a^2 h$.

2°. Le piston parvenu en gh étant supposé descendre, ou fouler l'eau, et par conséquent la soupape E étant fermée, on a $Y = a^2 \times SM + a^2 \times gL - a^2 \times SM - P = a^2 H - P$.

La somme des deux forces X et Y est $a^2 h + a^2 H$, ou $a^2 \times ML$. Ainsi l'effort total que l'agent est obligé de déployer pour mouvoir la machine, est égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit pour base la tête du piston, et pour hauteur celle du point où l'eau est élevée au-dessus du réservoir. Mais nous avons ici l'avantage, que cet effort se partage en deux parties, l'une qui répond à l'aspiration, l'autre au refoulement; au lieu que dans les deux premières espèces de pompes, l'effort total s'exerce pendant que le piston s'élève et foule l'eau.

II. Soit la pompe de la *Figure* 40. En nommant a^2 l'aire du cercle gh; h la hauteur rM du piston parvenu en gh, au-dessus de l'eau du réservoir; H la hauteur rL depuis gh jusqu'au point où l'eau est élevée; P le poids du piston et de son équipage; X la force qui pousse le piston de haut en bas, ou pendant l'aspiration; Y la force qui pousse le piston de bas en haut, ou pendant le refoulement : on trouvera (abstraction faite du frottement), $X = a^2 h - P$, $Y = a^2 H + P$; et par conséquent $X + Y$

$= a^2 h + a^2 H = a^2 (h + H) = a^2 \times ML$, même résultat, même conséquence ultérieure que pour le premier cas.

89. *Remarque.* Nous ferons, au sujet de ce problème, une remarque qui mérite la plus grande attention.

Comme dans toute machine, il est essentiel d'établir, autant qu'il est possible, l'uniformité de mouvement, on doit s'attacher ici à rendre les deux forces X et Y égales entr'elles. Or cette égalité donne, pour la *Figure* 39, $P + a^2 h = a^2 H - P$, ou $P = \frac{a^2 (H - h)}{2}$; et pour la *Figure* 40, $a^2 h - P = a^2 H + P$, ou $P = \frac{a^2 (h - H)}{2}$. Ainsi (*Fig.* 39), des deux parties gL, gM de la hauteur totale ML, la première doit être plus grande que la seconde; au contraire (*Fig.* 40), rL doit être moindre que rM. On ne peut pas supposer que les hauteurs partielles h et H soient égales entr'elles, car cela donneroit $P = o$; ce qui est impossible. On ne peut pas supposer non plus que P soit une quantité négative.

Si tout restant d'ailleurs le même, la surface MN de l'eau du réservoir vient à s'abaisser ou à s'élever (ce qui arrive quand le tuyau d'aspiration trempe dans une rivière), il faut diminuer ou augmenter P en conséquence; ce qu'on peut toujours obtenir, du moins jusques à un certain point, en chargeant

ou en déchargeant la tête du piston de certains poids amovibles.

Le défaut d'équilibre entre les forces X et Y est très-commun. On y est tombé dans les prétendues corrections que l'on fit, il y a quelques années, à l'un des équipages des pompes de la Samaritaine. Il ne paroît pas qu'on ait connu la véritable cause des inconvéniens qui ont résulté de ces changemens.

La hauteur ML à laquelle on veut élever l'eau, étant donnée, on déterminera, d'après les distances verticales de la position *moyenne* gh de la tête du piston à la surface de l'eau du réservoir, et à la surface de la décharge, qu'elle est celle des deux pompes (*Fig.* 39 *et* 40) qu'il convient d'employer. Cette position moyenne peut être supposée répondre au milieu de la course totale GI du piston.

Tous les calculs précédens sont établis pour le simple état d'équilibre : il faudra ensuite augmenter les forces, quand on voudra faire passer les machines du repos au mouvement.

Observations générales.

90. Dans les trois espèces de pompes proposées, le jet d'eau formé au dégorgeoir n'est pas toujours égal, et il éprouve de l'intermittence ; car il y a environ la moitié du temps qui est employée à abaisser ou à élever le piston pour prendre de nouvelle eau ; et pendant cette partie du temps, il ne sort point d'eau, ou du moins il n'en sort que très-peu par le dégorgeoir.

On peut éviter cette intermittence, ou rendre le jet continu, en garnissant le tuyau montant, comme on le voit dans la pompe foulante de la *Figure* 41, d'une espèce de tambour creux $G x$, fermé au-dehors de tous côtés, mais qui communique avec le tuyau interrompu en G, H. Ce tambour, qu'on appelle *réservoir d'air*, contient d'abord de l'air qui a même densité que celui du dehors. Quand on élève le piston, l'eau qui monte par la branche $CBDQ$, se répand en partie dans le réservoir Gx; elle condense l'air qui y est contenu; elle lui coupe la communication avec l'air extérieur, et le réduit à n'occuper que l'espace $k r y x$. Lorsqu'ensuite on abaisse le piston, l'air ainsi condensé se dilate par son ressort, force l'eau à descendre de $k r$ en $K R$, et à s'élever par conséquent dans la branche $GHQD$. En continuant le même jeu, on voit qu'il monte sans sans cesse de l'eau dans cette branche, et que le jet à l'endroit du dégorgeoir doit être continu, du moins sensiblement.

91. Il y a des faiseurs de pompes qui s'imaginent que le réservoir d'air augmente de moitié l'effet de la machine; car, disent-ils, puisqu'alors le jet est continu, la pompe doit donner deux fois autant d'eau qu'elle en donneroit s'il n'y avoit pas de réservoir d'air, et que le jet fût intermittent. Mais ils ne font pas attention que le produit de la pompe n'est jamais que la quantité d'eau que le piston soulève en montant; et que la puissance motrice (la vitesse du piston demeurant toujours la même) emploie toujours le

même effort, soit qu'elle fasse monter directement cette eau jusqu'au dégorgeoir, soit qu'une partie de cette eau se répande dans le réservoir d'air, d'où elle est soulevée ensuite par le ressort de l'air. Car dans le second cas, il faut tendre le ressort de l'air du réservoir $G x$; et cet effort, joint à celui qui fait monter actuellement une partie de l'eau dans la branche $GHQD$, épuise la force entière; ce qui revient au premier cas. Si donc le jet est continu quand il y a un réservoir d'air, l'eau sort avec une vitesse deux fois moindre qu'elle ne sortiroit s'il n'y avoit pas de pareil réservoir, et que le jet fût intermittent; et le produit de la pompe est toujours le même. Le réservoir d'air a donc simplement l'avantage de procurer plus d'uniformité au mouvement de la machine; et de rendre le jet d'eau continu, ce qui est très-utile dans les pompes à incendie, parce qu'un jet d'eau continu éteint plus facilement le feu, qu'un jet qui va par bonds; quoiqu'avec plus de vitesse.

92. On emploie, pour mouvoir les pompes, toutes sortes d'agens, comme des hommes, des chevaux, des courans d'eau, l'action du vent, etc. Les petites machines de ce genre, telles que les pompes à puits ou à incendies, sont ordinairement mues à bras d'hommes. Lorsqu'il faut élever une quantité considérable d'eau, on multiplie à proportion la force motrice; et pour qu'elle exerce continuellement le même effort, du moins à peu-près, sans rester jamais oisive, on établit plusieurs équipages de pompes;

de manière que lorsqu'une partie des pistons descend, l'autre monte.

93. La régularité du mouvement d'une pompe dépend principalement du jeu alternatif et bien combiné des soupapes. Il faut que ces pièces soient construites et disposées de telle manière, qu'elles ne laissent pas échapper l'eau quand elles sont fermées, et qu'elles s'ouvrent facilement, lorsqu'elles doivent en effet s'ouvrir. Les détails de pratique sur ce sujet n'entrent pas dans mon plan : ils demanderoient un ouvrage à part; les ouvriers excellens dans cette partie sont fort rares.

94. Les tuyaux des pompes souffrent quelquefois des efforts très-considérables. L'expérience est le meilleur guide qu'on puisse suivre pour en déterminer les épaisseurs. Lorsque ces tuyaux seront faits avec des matières flexibles, comme, par exemple, avec du plomb, du cuivre, ou même avec du fer, et qu'on aura évalué en colonnes d'eau de hauteurs données, les pressions qu'ils supportent, on trouvera, du moins à peu-près, les épaisseurs qu'ils doivent avoir pour ne pas crever, au moyen de la théorie du chapitre IV.

CHAPITRE

CHAPITRE VIII.

Continuation du même sujet : hauteurs auxquelles l'eau s'élève successivement dans les pompes ; arrêts qu'elle peut éprouver.

95. Les différentes places qu'on peut faire occuper à la soupape dormante dans la pompe aspirante, sont plus ou moins favorables à l'ascension de l'eau. Dans la pompe la plus ordinaire de ce genre (*Fig.* 37) où la soupape dormante E est placée à la jonction AC du corps de pompe avec le tuyau d'aspiration AN, l'eau montera toujours successivement, et arrivera, après un certain nombre de coups de piston, jusques au corps de pompe, pourvu que la hauteur du tuyau AN soit moindre que 32 pieds, et que l'évacuation de l'air se fasse convenablement (77). Cette position de la soupape E est la plus avantageuse de toutes : elle a cependant l'inconvénient que les cuirs dont la soupape est ordinairement garnie, venant à se dessécher lorsque la pompe reste quelque temps dans l'inaction, il peut arriver que la soupape E ne se ferme pas bien exactement, ce qui obligeroit à diminuer la hauteur du tuyau d'aspiration, ou à baisser la soupape. Il y a des pompes aspirantes où l'on place la soupape dormante en MN, au bas du tuyau d'aspiration I, pour que cette soupape soit toujours noyée; ce qui obvie à

l'inconvénient dont nous venons de parler. Entre ces deux positions extrêmes, que nous allons considérer, sont les positions intermédiaires auxquelles on appliquera sans peine les mêmes raisonnemens.

Quelquefois la soupape dormante E étant placée en AC, on en met aussi une autre en MN: alors celle-ci fait simplement, par rapport à la précédente, la fonction de *soupape de sureté*. Ces deux soupapes jouent en même temps et ont les mêmes mouvemens alternatifs.

96. La solution des problêmes suivans dépend de ce principe : à chaque ascension partielle de l'eau, ou après chaque élévement du piston jusques en KI, il y a équilibre entre la pression de l'atmosphère sur la surface MN du réservoir, la force élastique de l'air raréfié et affoibli, contenu depuis KI jusqu'à la surface de la colonne d'eau élevée dans le tuyau d'aspiration, et le poids de cette même colonne. Or, pour établir clairement les conditions de cet équilibre entre nos trois forces, nous les réduirons à la même espèce; et nous représenterons en conséquence les deux premières par des pressions de colonnes d'eau, de hauteurs convenables : hauteurs que j'appellerai, pour abréger, *hauteurs dues* aux forces dont il s'agit. La hauteur due à la pression de l'atmosphère est constante, ou peut être supposée telle; mais la hauteur due à la pression ou à la force élastique de l'air intérieur, successivement raréfié et affoibli, est variable, et dépend du degré de cet affoiblissement. Cela étant posé, on voit qu'il

y aura équilibre entre les trois forces dont il est question, si la hauteur due à la pression de l'atmosphère est égale à la somme de la hauteur due à la pression de l'air intérieur affoibli, et de la hauteur de la colonne d'eau élevée dans le tuyau d'aspiration au-dessus du niveau MN du réservoir. Il est indifférent d'ailleurs que les pressions s'exercent sur des bases égales ou inégales, comme il est indifférent, dans un siphon, que les deux branches soient égales ou inégales (19).

97. Problême I. *Déterminer les élévations successives de l'eau dans la pompe aspirante, en supposant que la soupape dormante* E *soit placée en* AC *au haut du tuyau d'aspiration.*

Supposons qu'en vertu du premier coup ou de la première ascension du piston, de GH en KI, l'eau s'élève en xu dans le tuyau d'aspiration; et imaginons que le piston demeure un instant en KI. Alors la pression de l'atmosphère ou de l'air naturel contre-balance la pression de la colonne d'eau Mu, et la force de l'air dilaté dans l'espace Ku.

NOMMONS {
La hauteur AM du tuyau d'aspiration.... a,
Le jeu GK ou AK du piston............ b,
Le rayon du corps de pompe AD......... R,
Le rayon du tuyau AN d'aspiration...... r,
Le rapport de la circonférence au diamètre.. Π,
La hauteur dûe à la pression de l'air naturel. h,
La hauteur xM de la colonne Mu......... x,
La hauteur dûe à la pression ou à la force élastique de l'air dilaté dans l'espace Ku.. y.

On aura d'abord l'équation (A), $h = x + y$.

La hauteur dûe à la force élastique de l'air naturel qui occupoit l'espace AN avant l'ascension du piston, étant représentée par h, et cet air s'étant répandu, pendant l'aspiration, dans l'espace Ku, la hauteur y dûe à la force élastique qu'il a dans ce second état, sera représentée (68) par $h \times \frac{AN}{Ku}$; c'est-à-dire qu'on aura $y = h \times \frac{AN}{Ku}$. Or, l'espace ou le cylindre $AN = \pi r^2 a$; l'espace Ku ou la somme des cylindres KC, Au, est $= \pi R^2 b + \pi r^2 (a - x)$. Ainsi nous aurons cette seconde équation (B), $y = \frac{hr^2 a}{R^2 b + r^2 (a - x)}$.

Comparant ensemble les deux équations (A) et (B), et faisant, pour abréger, $\frac{R^2}{r^2} = k$, $h + a + kb = p$, on trouvera,

$$x = \frac{p \pm \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2},$$

$$y = \frac{2h - p \mp \sqrt{(p^2 - 4khb)}}{2}.$$

Des deux valeurs de x et de y, indiquées par le double signe, il ne faut prendre que les valeurs indiquées par les signes inférieurs ; car chacune des valeurs de x ou de y, doit être moindre que h. Or, si l'on employoit le signe supérieur pour x, on auroit $\frac{p + \sqrt{(pp - 4khb)}}{2} > h$, ou $+\sqrt{[(h + a + kb)^2 - 4khb]} > h - a - kb$,

puisqu'en carrant chaque membre et réduisant, il vient $4\ ah > 0$. Si au contraire on emploie le signe inférieur pour x, on trouvera que la valeur de x est moindre que h; et que la valeur correspondante pour y, c'est-à-dire, la quantité $\frac{h-a-kb+\sqrt{[(h+a+kb)^2-4khb]}}{2}$, est aussi moindre que h, puisque $\frac{\sqrt{[(h+a+kb)^2-4khb]}}{2}$ $< h+a+kb$, le terme $-4khb$ étant toujours négatif. Par conséquent les deux valeurs de x et de y, qui satisfont au problème, sont :

$$\text{I.}\ \begin{cases} x=\dfrac{p-\sqrt{(pp-4khb)}}{2}, \\ y=\dfrac{2h-p+\sqrt{(pp-4khb)}}{2}. \end{cases}$$

Connoissant ainsi les valeurs de x et de y, qui répondent au premier coup de piston, on trouvera semblablement les valeurs analogues qui doivent répondre successivement au second, au troisième, au quatrième, etc. coup de piston. En effet, soit My la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aspiration, correspondante au second coup de piston, c'est-à-dire, après que le piston redescendu d'abord de KI en GH, est remonté ensuite de GH en KI. Nommons x' cette hauteur, et y' la hauteur dûe à la force élastique du second air affoibli. Nous aurons d'abord l'équation, (C), $h=x'+y'$.

L'air affoibli qui, au premier instant de la seconde aspiration, occupoit l'espace Au, et qui avoit alors

une force élastique dûe à la hauteur y, étant maintenant répandu dans l'espace Kz, aura une force élastique dûe à la hauteur $y \times \frac{Au}{Kz}$, ou $\frac{yr^2(a-x)}{R^2b+r^2(a-x')}$. On aura donc $y' = \frac{yr^2(a-x)}{R^2b+r^2(a-x')}$, ou $(D), y' = \frac{y(a-x)}{a-x'+kb}$.

Comparant ensemble les deux équations (C) et (D), et mettant pour y sa valeur $h-x$, on trouvera :

$$\text{II.} \begin{cases} x' = \frac{p - \sqrt{[pp - 4khb - 4x(h+a-x)]}}{2}, \\ y' = \frac{2h - p + \sqrt{[pp - 4khb - 4x(h+a-x)]}}{2}. \end{cases}$$

J'ai pris les signes inférieurs pour les valeurs de x' et de y', par la même raison que pour les valeurs de x et de y. Il en sera de même pour les suivantes.

Semblablement, si l'on nomme x'' la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aspiration, après le troisième coup de piston; y'' la hauteur dûe à la force élastique du troisième air affoibli : on trouvera, en observant que x'' et y'' dérivent de x' et de y', suivant la même loi que x' et y' dérivent de x et de y, on trouvera, dis-je :

$$\text{III.} \begin{cases} x'' = \frac{p - \sqrt{[pp - 4khb - 4x'(h+a-x')]}}{2}, \\ y'' = \frac{2h - p + \sqrt{[pp - 4khb - 4x'(h+c-x')]}}{2}. \end{cases}$$

Ainsi de suite.

D'où l'on voit que si en général on désigne par $x^{(n)}$ la valeur de x, après le nombre $n+1$ de coups de piston; par $y^{(n)}$ la valeur correspondante de y; par $x^{(n-1)}$ la valeur de x après le nombre n de coups de piston; par $y^{(n-1)}$ la valeur correspondante de y: on aura,

$$x^{(n)}=\frac{p-\sqrt{[pp-4khb+4x^{(n-1)}(h+a-x^{(n-1)})]}}{2},$$

$$y^{(n)}=\frac{2h-p+\sqrt{[pp-4khb-4x^{(n-1)}(h+a-x^{(n-1)})]}}{2}.$$

98. *Corollaire.* Il est évident qu'au moyen des équations précédentes, on connoîtra, après un nombre quelconque de coups de piston, la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aspiration, et la force élastique de l'air enfermé dans la machine. On connoîtra aussi les hauteurs produites par chaque coup de piston en particulier, et les différences des forces élastiques successives de l'air enfermé, puisqu'ayant trouvé x, x', x'', etc. y, y', y'', etc, on a les valeurs des quantités x, $x'-x$, $x''-x'$, etc. y, $y'-y$, $y''-y'$, etc.

En regardant le poids de la soupape E comme nul, on formera, après un certain nombre de coups de piston, un vide d'air dans la pompe, et l'eau finira toujours par s'élever en E, pourvu que la hauteur AM soit tout au plus égale à h. Cette proposition, qui est une suite de l'hypothèse, que la hauteur h dûe à la pression de l'atmosphère est ici AM, résulte de nos formules. Car, si après un certain nombre $n+1$ de coups de

piston, l'eau s'arrêtoit dans le tuyau d'aspiration, on auroit $x^{(n)} = x^{(n-1)}$, et par conséquent $x^{(n-1)} = \frac{p - \sqrt{[pp - 4khb - 4x^{(n-1)}(h+a-x^{(n-1)})]}}{2}$; d'où l'on tire $x^{(n-1)} = h$, et d'où l'on doit conclure que si a ou $AM < h$, l'eau ne s'arrêtera pas dans le tuyau d'aspiration, et qu'elle passera dans le corps de pompe.

Lorsqu'il faudra avoir égard au poids de la soupape E, vous le regarderez comme celui d'une colonne d'eau qui a pour base l'ouverture de la soupape, et une hauteur donnée en conséquence; vous retrancherez cette hauteur de h, et vous substituerez le reste h' à la place de h dans les calculs précédens. Alors, tous les résultats qui ont lieu par rapport à h seront aussi vrais pour h', qu'on peut regarder comme la hauteur dûe à la force extérieure qui tend maintenant à faire monter l'eau dans le tuyau d'aspiration, puisque l'effort de la soupape E est contraire à celui de la pression totale de l'atmosphère et doit en être soustrait.

93. Problême II. *Supposons maintenant que, tout restant d'ailleurs le même, la soupape dormante* E *soit placée en* MN, *au bas du tuyau d'aspiration: on demande la loi de l'ascension de l'eau dans la pompe.*

En faisant monter et descendre alternativement le piston, l'eau entrera dans le tuyau d'aspiration et s'y élévera, mais non pas de la même manière que dans le cas précédent. Elle pourra s'arrêter,

en supposant même que la hauteur AM du tuyau d'aspiration soit beaucoup moindre que 32 pieds. Car soit, par exemple, Mt la hauteur à laquelle l'eau est arrivée après un certain nombre de coups de piston : comme, le piston étant descendu en GH, l'air compris dans l'espace tH est devenu de l'air naturel, il peut se faire que la force élastique de cet air dilaté lorsque le piston arrive en KI, jointe à la pression de la colonne d'eau élevée dans le tuyau d'aspiration, forme une somme ou une force égale à la pression de l'atmosphère ; d'où il suit que l'eau ne pourra pas monter davantage. Cherchons donc par le calcul la manière dont l'eau s'élève ; ce qui nous fera connoître les cas où les *arrêts* ont lieu.

Soient Mx, My, etc. les hauteurs successives auxquelles l'eau arrive dans le tuyau d'aspiration. En gardant toutes les dénominations de l'article 97, il est évident d'abord qu'on aura ici comme là, après le premier coup de piston, les deux équations,

$$x+y=h, y=\frac{ha}{kb+a-x}; \text{ d'où l'on tire,}$$

$$x=\frac{p-\sqrt{(pp-4khb)}}{2};$$

$$y=\frac{2h-p+\sqrt{(pp-4khb)}}{2}.$$

Mais les équations analogues suivantes ne sont pas les mêmes.

Pour les trouver, on observera qu'au commencement de la seconde aspiration, l'air compris dans

l'espace Au est de l'air naturel; d'où il suit que cet air, après la seconde aspiration, étant répandu dans l'espace Kz, la hauteur dûe à sa force élastique sera $h \times \frac{Au}{Kz}$, ou $\frac{h(a-x)}{kb+a-x'}$. On aura donc, $y' = \frac{h(a-x)}{kb+a-x'}$; et comme on a toujours $x'+y'=h$, on trouvera :

$$x' = \frac{p-\sqrt{[(pp-4kbh-4hx)]}}{2},$$

$$y' = \frac{2h-p+\sqrt{(pp-4khb-4hx)}}{2}.$$

De même, en observant que x'' et y'' dérivent de x' et de y', comme x' et y' dérivent de x et y, on trouvera :

$$x'' = \frac{p-\sqrt{(pp-4khb-4hx')}}{2},$$

$$y'' = \frac{2h-p+\sqrt{(pp-4khb-4hx')}}{2}.$$

Et en général,

$$x^{(n)} = \frac{p-\sqrt{(pp-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2},$$

$$y^{(n)} = \frac{2h-p+\sqrt{(pp-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2}.$$

Maintenant, supposons que l'eau s'arrête après le nombre $n+1$ de coups de piston; on aura alors $x^{(n)} = x^{(n-1)}$, et par conséquent

$$x^{(n-1)} = \frac{p-\sqrt{(pp-4khb-4hx^{(n-1)})}}{2}.$$

d'où l'on tire

$$x^{(n-1)} = \frac{a+kb\pm\sqrt{[(a+kb)^2-4khb]}}{2};$$

et d'où l'on voit qu'à cause du double signe, l'eau s'arrêtera en deux endroits, lorsque la quantité radicale sera réelle : condition qui exige que l'on ait, ou $(a+kb)^2 = 4khb$, ou $(a+kb)^2 > 4khb$. Dans la première hypothèse, les deux valeurs de $x^{(n-1)}$ sont égales, et l'eau ne s'arrête qu'en un seul endroit, auquel répond la valeur $x^{(n-1)} = \frac{a+kb}{2}$: dans la seconde, l'eau s'arrête en deux endroits auxquels répondent les deux valeurs de $x^{(n-1)}$. Si la quantité radicale est imaginaire, il n'y a point d'arrêt à craindre. Éclaircissons cette théorie par un ou deux exemples.

100. *Exemple I.* Soient $h = 32$ pieds ; $a = 20$ pieds ; $b = 4$ pieds ; $k = 1$, ou le rayon du tuyau d'aspiration, égal à celui du corps de pompe, de manière que ces tuyaux n'en forment qu'un seul. On trouvera pour $x^{(n-1)}$, ces deux valeurs, $x^{(n-1)} = 8$ pieds ; $x^{(n-1)} = 16$ pieds. Ainsi il y a d'abord un arrêt, quand l'eau dans le tuyau d'aspiration est arrivée à 8 pieds de hauteur au-dessus de *MN*. Si alors on verse par en haut de l'eau dans la pompe, en soulevant, par exemple, avec un crochet la soupape *F*, cet arrêt subsistera tant que la hauteur de l'eau dans le tuyau d'aspiration sera moindre que 16 pieds, ou ne surpassera pas 16 pieds ; mais passé ce point, il n'y a plus d'arrêt. Tout cela est aisé à voir immédiatement : car dans l'intervalle de 8 pieds à 16 pieds,

la hauteur de la colonne d'eau aspirée et la hauteur dûe à la force élastique de l'air intérieur, forment une somme > 32 pieds; mais la somme analogue est < 32 pieds, dans l'intervalle de 16 pieds à 20 pieds d'où commence la course du piston.

101. *Exemple II.* Soient $h = 32$ pieds; $a = 25$ pieds; $b = 2$ pieds; $k = 4$. On trouvera ces deux valeurs, $x^{(n-1)} = \frac{33 \pm \sqrt{65}}{2}$. L'eau s'arrêtera donc en deux endroits. Mais si tout restant d'ailleurs le même, on faisoit $k = 6$, il n'y auroit point d'arrêt; il n'y en auroit point non plus, si continuant de laisser $k = 4$, on faisoit $b = 4$ pieds, etc.

102. *Corollaire.* On voit, par ces calculs, les inconvéniens de placer la soupape dormante en *MN*. Il est vrai qu'alors, étant toujours noyée dans l'eau, elle est moins exposée à dépérir qu'elle ne seroit dans l'air. De plus, sa pesanteur diminuée par l'eau, oppose peu de résistance à la pression de l'atmosphère; mais par-là même elle peut balotter dans l'eau, et ne pas joindre bien exactement les parois du trou qu'elle doit boucher. Il vaut donc beaucoup mieux établir la soupape dormante *E* en *AC* qu'en *MN*; sauf à prendre les précautions nécessaires pour empêcher que les cuirs de cette soupape ne viennent à se dessécher. On doit aussi, dans tous les cas, prendre des précautions semblables pour la soupape mobile, portée par le piston.

103. *Scholie.* Il est facile d'appliquer la même

théorie à la pompe foulante, et à la pompe aspirante et foulante.

La pompe foulante (*Fig.* 38) n'est sujette à aucun arrêt, lorsque la soupape dormante E trempe dans l'eau du réservoir. Mais si cette soupape étoit placée au-dessus de la surface MN du réservoir, par exemple en rs, à une hauteur st, telle que l'espace intérieur $ACsr$ fût plus grand que le volume d'eau que le piston soulève en montant depuis KI jusqu'en GH : alors il pourroit se faire que l'eau ne pût arriver en rs, et qu'elle s'arrêtât quelque part au-dessous de cette ligne. Car supposons que par la première élévation du piston, l'eau arrive en uz : en ce moment l'air compris depuis la surface de cette eau jusqu'en rs, est de l'air naturel qui se dilate et s'affoiblit quand le piston descend; ainsi de suite alternativement, pendant tout le temps que le piston joue. Lorsque le piston descend, la colonne d'eau Az est poussée de haut en bas par son propre poids, et par la force élastique de l'air contenu dans l'espace us : de telle sorte que la résultante ou la somme de ces deux forces, fait équilibre à la pression de l'atmosphère sur la surface MN du réservoir. Or, puisque la colonne d'eau Az monte avec le piston et descend avec lui; s'il arrive (ce qui est évidemment possible), que d'un coup de piston au suivant la descente de la colonne d'eau Az soit égale à sa montée, elle ne pourra jamais atteindre rs. Il y aura donc alors ce qu'on appelle *arrêt*, dans la machine. Le calcul des

élévations successives de l'eau et de ses arrêts, se fait exactement de la même manière que pour la pompe aspirante.

Dans la pompe aspirante et foulante, il peut se trouver également des arrêts qu'on déterminera toujours par les mêmes moyens, soit que l'aspiration se fasse quand le piston monte (*Fig.* 39), ou qu'elle ait lieu quand le piston descend (*Fig.* 40). On doit se souvenir dans tous les cas que la force élastique de l'air diminue en même raison que son volume augmente.

Je finis par un problême qui pourra avoir son utilité dans la pratique.

104. Problême. *Déterminer l'ascension de l'eau dans le tuyau montant d'une pompe, quand elle y est poussée par l'action d'une manivelle triple, combinée avec la pression de l'atmosphère.*

Soit $AMNC$ (*Fig.* 42), un tuyau vertical, plongé dans l'eau MN d'un réservoir, et portant trois corps de pompe égaux, dans lesquels jouent trois pistons par le moyen de trois leviers RV, TY, SX. Ces leviers reçoivent eux-mêmes le mouvement de trois chaînes ou de trois autres leviers RB, TK, SH, dont les extrémités B, K, H, formant les sommets d'un triangle équilatéral BKH, ou ce qu'on nomme la *manivelle triple*, tournent circulairement autour du centre O de ce triangle. La roue $BKDH$ est mue par un agent quelconque, tel, par exemple, qu'un courant d'eau qui la fait

tourner dans le sens *BKDH*. La disposition et le mouvement des soupapes sont les mêmes pour chaque corps de pompe, que dans la pompe aspirante ordinaire. Nous plaçons les soupapes *dormantes* *E*, *E'*, *E''* immédiatement à la jonction de chaque corps de pompe avec le tuyau d'aspiration *AMNC*.

La position des points d'appui des trois leviers *RV*, *TY*, *SX*, est indifférente, quant aux principes d'où dépend la solution du problême; mais pour simplifier le discours et les expressions du calcul, nous supposons que ces appuis sont dans les milieux des leviers : de sorte que la levée de chaque piston est égale au diamètre du cercle que décrit la manivelle.

Quelle que puisse être la situation initiale de la manivelle, il est clair qu'alors l'air compris dans le tuyau d'aspiration et dans le corps de pompe, est de l'air naturel. Quand ensuite on fait tourner la manivelle, l'air compris dans le tuyau d'aspiration, et dans le corps de pompe dont le piston monte, se raréfie ou se dilate, seulement parce que ce piston monte : un piston qui s'abaisse, donne l'entrée à l'air extérieur dans l'espace compris entre sa soupape mobile et sa soupape dormante. En effet, lorsqu'un piston quelconque monte, sa soupape mobile est fermée et sa soupape dormante est ouverte : le contraire arrive pour un piston qui descend.

Supposons d'abord qu'au premier instant le coude

B de la manivelle soit placé à l'extrémité supérieure du diamètre vertical BD de la roue, et que par conséquent la ligne horizontale KH, qui joint les deux autres coudes de la manivelle, divise le rayon OD en deux parties égales. En cet instant, la soupape mobile F touche ou peut être censée toucher la soupape dormante E; et les soupapes mobiles F', F'' sont chacune distantes de leurs soupapes dormantes E', E'', d'une quantité $= BG$. Soient les points Q, M, les milieux des arcs EK, BH, et soit menée la droite QM : la circonférence de la roue se trouve ainsi partagée en six parties égales BQ, QK, KD, DH, HM, MB; et on a $BL = DG$. Comme les coudes B, K, H de la manivelle, en s'abaissant ou en s'élevant, font au contraire monter ou descendre les pistons, on voit que lorsqu'après un sixième de révolution, B est arrivé en Q, K en D, H en M; le piston correspondant à B sera élevé d'une quantité égale à BL; le piston correspondant à K, déjà élevé de la quantité BG, s'est élevé encore de la quantité GD; enfin le piston correspondant à H, d'abord élevé de la quantité BG, s'abaisse de la quantité GL. On voit aussi que l'air intérieur venant à se dilater, l'eau s'élève à une certaine hauteur Mr dans le tuyau d'aspiration. Or, puisque la dilatation de l'air intérieur ne s'opère que par l'ascension des pistons, il s'ensuit que si l'on nomme π le rapport de la circonférence au diamètre; m le rayon du tuyau d'aspiration; n le rayon de chacun des trois corps

corps de pompe; il s'ensuit, dis-je, que la portion d'air intérieur qui au premier instant occupoit un espace représenté par $\pi m^2 \times AM + \pi n^2 \times BG$, et la seule qui se dilate, occupe à la fin du sixième de révolution un espace $= \pi m^2 \times Ar + \pi n^2 \times (BD + BL)$. Dans ce second état, la force élastique de l'air ainsi dilaté, jointe au poids de la colonne d'eau rN, doit faire équilibre à la pression de l'atmosphère. Ainsi on pourra déterminer, par la méthode de l'article 97, la hauteur Mr, après le premier sixième de révolution. On déterminera de même la hauteur Mt de l'eau après le second sixième de révolution, en considérant qu'aussi-tôt que le coude K, maintenant en D, passe ce point, la portion d'air dilaté qui est demeurée dans l'intérieur de la pompe, et qui dès ce moment se réduit à la quantité $\pi m^2 \times Ar + \pi n^2 \times BL$, passe au volume $\pi m^2 \times At + \pi n^2 \times BG$, quand le point K arrive en H; ainsi de suite.

En général, qu'au premier instant les trois coudes de la manivelle soient placés aux points b, k, h. Menez au diamètre vertical BD les perpendiculaires bf, kg, hi. Puis cherchez d'abord la hauteur Mu, à laquelle l'eau s'élève dans le tuyau d'aspiration, pendant que b va en Q, k en D, h en M. Or, dans cet intervalle de temps, la portion d'air naturel intérieur qui vient à se dilater, et qui occupoit un espace représenté par $\pi m^2 \times AM + \pi n^2 \times (Bf + Bg)$, finit par occuper un espace $= \pi m^2 \times Au + \pi n^2 \times (BD + BL)$. Au

moment que le point K passe le point D, la portion d'air intérieur dilaté se réduit à la quantité $\Pi m^2 \times A u + \Pi n^2 \times B L$; et quand le point K arrive en H, elle passe au volume $\Pi m^2 \times A z + \Pi n^2 \times B G$, la hauteur $M z$ étant alors celle de l'eau dans le tuyau d'aspiration; ainsi de suite.

Il est facile d'exprimer analytiquement les ascensions progressives de l'eau dans le tuyau d'aspiration, et de s'assurer par-là si elle arrivera ou non aux corps de pompe. Le détail de ces calculs me meneroit trop loin.

Les mêmes principes s'appliquent à l'action des manivelles plus compliquées. La manivelle triple est le plus en usage.

CHAPITRE IX.

Des densités de l'atmosphère à différentes hauteurs : usage du Baromètre pour déterminer les différences de ces hauteurs.

105. LES couches inférieures de l'atmosphère portant le poids des couches supérieures, l'air doit avoir, par cette cause seule, une plus grande densité et une plus grande force élastique dans les lieux bas que dans les lieux élevés. Si l'on connoissoit exactement la loi suivant laquelle il se comprime, ou se dilate d'un point à l'autre, on pourroit dé-

terminer, ou par l'état de l'air en un endroit quelconque, la hauteur de cet endroit au-dessus d'un niveau connu, tel, par exemple, que celui de la mer; ou réciproquement, l'état de l'air, par la hauteur. L'un de ces problèmes est, comme on voit, l'inverse de l'autre; et la Géométrie fournit toujours des moyens, au moins approchés, pour déterminer la chose inconnue dans ces sortes de questions.

106. Problème. *Trouver une équation entre les densités de deux points de l'atmosphère, la différence de leurs hauteurs, et la pression de l'air.*

Soient AB (*Fig.* 43) une colonne verticale de l'atmosphère, dont le point le plus élevé A est supposé donné de position; Q un point quelconque indéterminé; MBN un niveau connu. Supposons la gravité $= g$; la pression que l'air environnant exerce en tous sens sur le point $Q = p$; $AQ = q$; $BQ = x$; la densité connue de l'air en $B = D$; la densité de l'air en $Q = \phi$, laquelle est une fonction de D et de la hauteur BQ; elle peut renfermer encore dans son expression une quantité dépendante de la chaleur en Q, ou de quelque autre qualité physique. Il est clair que le poids du filet AQ est $\int g\phi\, dq$; et comme ce poids doit être en équilibre avec la pression p de l'air environnant, on aura l'équation $p = \int g\phi\, dq$, ou, en différenciant, $dp = g\phi\, dq$; ou (en mettant pour dq sa valeur $-dx$), $dp = -g\phi\, dx$. La nature de la fonction ϕ étant

donnée et substituée dans cette équation, on déterminera ensuite, par les méthodes ordinaires, soit p en x ou ϕ, soit x et ϕ en p.

107. *Corollaire I.* Lorsque l'air se condense uniquement par son propre poids, et abstraction faite de toutes les causes qui peuvent troubler la loi naturelle de cette condensation, la densité d'une couche quelconque est proportionnelle à la pression. Donc, en nommant P la pression de l'air en B, et sa densité étant D, on aura alors $P : D :: p : \phi = \frac{p D}{P}$; et par conséquent $dp = -\frac{g D p d x}{P}$, ou $d x = -\frac{P}{g D} \times \frac{d p}{p}$, dont l'intégrale est $x = C - \frac{P}{g D} \times \log. p$. La constante C doit être telle qu'en faisant $x = 0$, on ait $p = P$; donc $C = \frac{P}{g D} \times \log. P$. Ainsi $x = \frac{P}{g D} \times \log. \left(\frac{P}{p}\right)$.

Maintenant, les pressions P et p pouvant être exprimées par les poids des colonnes de mercure qui, dans le Baromètre, répondent aux points B et Q, si l'on nomme H et h les hauteurs de ces colonnes, δ la densité du mercure; on aura $P = g H \delta; p = g h \delta$: donc $x = \frac{H \delta}{D} \times \log. \left(\frac{H}{h}\right)$. Or, dans cette expression, x exprime le logarithme du nombre $\left(\frac{H}{h}\right)$, dans un système de

logarithmes dont le module est $\frac{H\delta}{D}$: désignons par $L.\left(\frac{H}{h}\right)$ le logarithme du même nombre, dans le système des Tables logarithmiques ordinaires, où le nombre fondamental est 10, et le module, 0,4342944 que je nomme m pour abréger; on aura, comme on sait, $x : L.\left(\frac{H}{h}\right) :: \frac{H\delta}{D} : m$; donc $x = \frac{H\delta}{Dm} \times L.\left(\frac{H}{h}\right)$, ou $x = \frac{H\delta}{Dm} \times (L.H - L.h)$. Par où l'on voit qu'en prenant dans les Tables ordinaires le logarithme du nombre $\left(\frac{H}{h}\right)$, ou la différence des logarithmes de H et de h; puis multipliant cette différence par la quantité $\frac{H\delta}{Dm}$, on aura la hauteur du point Q au-dessus du point B. Si l'on considère donc ce dernier point comme celui par rapport auquel on veut déterminer la position de plusieurs autres lieux, la question est d'abord de trouver le coéfficient $\frac{H\delta}{Dm}$.

108. *Corollaire II.* Prenons pour base de cette détermination, avec Bouguer (*Mém. de l'Acad. année* 1753, page 515), qu'en Amérique, à Carabourou, extrêmité septentrionale de la première base des triangles qui, dans cette partie du monde, ont servi à déterminer la figure de la Terre, le

mercure se tenoit dans le Baromètre à 21 pouces 2 lignes $\frac{3}{4}$, et qu'au sommet de la montagne de Pitchincha, il se tenoit à 15 pouces 11 lignes; et que par une mesure géométrique, le second poste se soit trouvé plus élevé que le premier, de 1208 toises. Regardant donc ici le point B comme Carabourou, et le point Q comme le sommet de Pitchincha : nous avons $x = 1208$ toises; $H = 21$ pouces 2 lignes $\frac{3}{4} = 254{,}75$ lignes; $h = 15$ pouces 11 lignes $= 191$ lignes; $L \cdot H = 2{,}4061142$; $L \cdot h = 2{,}2810334$; $L \cdot H - L \cdot h = 0{,}1250808$. Par conséquent on aura $1208 = \frac{H\delta}{Dm}$ $\times 0{,}1250808$; d'où l'on tire $\frac{H\delta}{Dm} = 9658$ toises à peu-près. Ainsi notre formule générale deviendra $x = 9658 \, (L \cdot H - L \cdot h)$; et en l'appliquant à des exemples, il ne faudra pas oublier que le coëfficient 9658 exprime toujours des toises. Quant aux hauteurs H, h du mercure dans le Baromètre, aux deux endroits, on les exprimera en mesures de la même espèce, par exemple, en lignes.

109. Exemple I. *On demande la position d'un village nommé Alaussy, situé au pied de la montagne de Choussai, par rapport à Carabourou, en supposant, comme Godin l'a observé, que le mercure dans le Baromètre se tenoit dans ce village à 21 pouces 1 ligne $\frac{1}{4}$.*

On a $H = 254{,}75$ lignes; $h = 253{,}25$ lignes;

$L . H - L . h = 0,0025648$. Donc $x = 24,77$ toises à peu-près, hauteur d'Alaussy au-dessus de Carabourou; ce qui s'accorde, à très-peu de chose près, avec la mesure géométrique.

110. Exemple II. *On demande la position du sommet de la montagne de Choussai, par rapport à Carabourou, en supposant que le mercure se tenoit dans le Baromètre, au sommet de Choussai, à 17 pouces 10 lignes $\frac{1}{2}$, comme Godin l'a observé.*

On a $H = 254,75$ lignes; $h = 214,5$ lignes; $L . H - L . h = 0,0746869$; donc $x = 722,95$ toises environ, hauteur du sommet de Choussai au-dessus de Carabourou; ce qui est sensiblement conforme à la mesure géométrique.

111. *Remarque I.* Bouguer a fait, par rapport à l'usage de la formule précédente, une observation arithmétique qui est utile pour abréger la pratique du calcul. Elle se réduit à prendre la différence des logarithmes des hauteurs où le mercure se tient dans le Baromètre aux deux endroits dont on veut connoître la position respective; à avancer de quatre rangs vers la droite la virgule décimale de cette différence; à regarder le nombre ainsi résultant comme exprimant des toises; et enfin à retrancher de ce même nombre sa trentième partie : le reste exprimera, à très-peu de chose près, l'élévation d'un lieu au-dessus de l'autre. Ainsi, dans le premier des deux exemples précédens, la différence des loga-

rithmes des hauteurs du mercure dans le Baromètre au village d'Alaussy et à Carabourou, étant 0,0025648, vous avancerez la virgule décimale de quatre rangs vers la droite; ce qui vous donnera 25,648 que vous regarderez comme exprimant des toises; vous prendrez la trentième partie de ce nombre, laquelle est 0,855; vous la retrancherez de 25,648; le reste 24,793 toises sera sensiblement la hauteur d'Alaussy au-dessus de Carabourou. De même, dans le second exemple, la différence des logarithmes des hauteurs du mercure dans le Baromètre à la montagne de Choussai et à Carabourou, étant 0,0746869; au lieu de ce nombre, vous prendrez 746,869 toises, dont retranchant la trentième partie, restera 721,974 toises pour la hauteur de Choussai au-dessus de Carabourou.

La raison de cette pratique est facile à découvrir: car si dans la formule $x = 9658\ (L\,H - L\,.\,h)$, où le facteur 9658 exprime des toises, au lieu de ce facteur, on employoit le facteur 10000 toises, qui est un peu plus grand; le produit de ce dernier facteur, par la différence des logarithmes des hauteurs du mercure dans le Baromètre aux deux endroits comparés, seroit, dans notre premier exemple, 25,648 toises, nombre un peu trop grand. Retranchant de ce nombre sa trentième partie, il vient 24,793 toises, ce qui est à peu de chose près le résultat que la formule donne immédiatement. Il en sera de même pour le second exemple et pour tous les autres.

112. *Remarque II.* Nous ferons en passant une observation qui se présente par rapport à l'expérience de la pompe de *Seville.* La hauteur à laquelle l'air qui entre par le trou E (*Fig.* 31) soutient la colonne d'eau ET, se détermine par la méthode précédente; car il est évident que la colonne d'eau ET peut être regardée comme un poids qui réagit contre l'air inférieur qui la pousse : il n'est pas moins clair que ce poids feroit équilibre à la pression de l'atmosphère en RP. Supposons donc, par exemple, que dans le lieu A où se fait l'expérience, la pression de l'atmosphère soutienne l'eau à 32 pieds de hauteur, ou, ce qui revient au même, le mercure à 28 pouces dans le Baromètre, et que la colonne d'eau ET soit de 24 pieds, ou équivalente à une colonne de mercure de même base et de 21 pouces de hauteur. La question proposée revient à ceci. On sait que dans un lieu A le mercure se soutient à 28 pouces dans le Baromètre; on demande la hauteur d'un lieu R où le mercure se soutiendra à 21 pouces. On trouve le lieu R plus élevé que le lieu A, de 1217 toises à peu-près. La colonne d'eau ET s'élèveroit donc à cette hauteur, si elle ne donnoit point de passage à l'air à travers sa masse, et si le frottement le long des parois du tuyau ne lui opposoit point de résistance.

113. *Scholie I.* Si dans la formule $x = \frac{H\delta}{mD}$ $(L . H - L . h)$, l'inconnue, au lieu d'être x, étoit l'une des autres quantités δ, D, H, h, cette

inconnue se trouveroit semblablement, tout le reste étant donné. Par exemple, supposons que l'on connoisse immédiatement, ou par une détermination trigonométrique, la hauteur BQ (x) du point Q au-dessus de B (*Fig.* 43); que de plus on ait observé et marqué les hauteurs H et h du mercure dans le Baromètre aux lieux B, Q : on demande le rapport $\frac{\delta}{D}$ de la densité δ du mercure à la densité D de l'air en B. En regardant ce rapport comme l'inconnue, on trouvera $\frac{\delta}{D} = \frac{m\,x}{H\,(L\,.\,H - L\,.\,h)}$: nombre absolu, puisque x et H sont des quantités de même espèce, ou réductibles à la même espèce, et que m, $(L\,.\,H - L\,.\,h)$ ou $L\,.\,\frac{H}{h}$, sont des nombres absolus.

114. *Scholie II.* De tous les moyens qu'on peut employer pour parvenir à la connoissance de la hauteur respective des montagnes, ou de leur élévation au-dessus d'un niveau connu, tel que celui de la mer, il n'en existe aucun qui approche par la simplicité, de la méthode proposée. Malheureusement les résultats qu'elle donne sont, en plusieurs cas, trop éloignés de la vérité, ou des déterminations tirées des mesures géométriques, pour qu'on puisse adopter généralement en sureté l'usage de cette méthode. Tâchons d'indiquer, au moins d'une manière approchée, les sources d'erreur et les remèdes qu'on y peut apporter.

I. Nous avons vu (67), et on en a une foule d'autres preuves expérimentales, que l'air se comprime suivant la proportion des poids dont il est chargé, ou que la force expansive d'une même masse d'air, réduite à occuper successivement différens volumes, suit le rapport inverse de ces volumes, ou le rapport direct des densités qu'elle a dans ces différens états. Les modifications que cette loi peut éprouver dans les cas extrêmes (73), n'ont pas lieu ici, même pour les plus hautes montagnes de la terre; car les dilatations ou condensations de l'air y demeurent toujours entre des limites qui ne peuvent altérer la règle. De cette première loi, il en doit résulter nécessairement une seconde : savoir, qu'une même colonne d'air de l'atmosphère étant composée de couches pesantes, dont les supérieures pressent les inférieures, comme si elles formoient une pile verticale d'écus posés les uns sur les autres; la force expansive ou élastique de l'air en chaque endroit de la colonne suivra exactement le rapport des densités, pourvu que l'*intensité* du ressort de chaque couche soit la même sur toute la hauteur de la colonne. Aussi la formule proposée, qui est établie uniquement sur le principe dont il s'agit, s'applique-t-elle avec succès à un très-grand nombre de cas. Bouguer en a éprouvé la justesse, non-seulement dans les exemples que nous avons rapportés d'après lui, mais encore dans plusieurs autres endroits du haut de la Cordelière du Pérou. En général elle réussit très-bien dans les lieux élevés,

où l'air est peu agité et conserve une température à peu-près égale d'un endroit à l'autre : elle a besoin de modifications dans les lieux bas. Bouguer l'a trouvée en défaut dans la partie inférieure de la Cordelière du Pérou ; elle ne réussit point sur toutes les autres montagnes de la Zone Torride ; elle a encore moins de succès en Europe, comme l'ont remarqué tous ceux qui ont examiné cette matière avec soin.

Les physiciens forcés de renoncer à l'usage strict d'une règle si commode, ont cherché à la corriger ou à la remplacer par d'autres qui ont en effet leur utilité particulière dans certaines régions, et pour des montagnes d'une hauteur comprise entre des limites déterminées. Mais toutes ces nouvelles méthodes supposent que les dilatations de l'air à différentes hauteurs ne suivent pas une progression géométrique, quoiqu'il soit certain, par une infinité d'expériences répétées sur le sommet des plus hautes montagnes du monde comme au bord de la mer, et dans la Zone Torride comme dans les Zones Tempérées, que les élasticités de chaque masse d'air sont exactement proportionnelles à ses divers degrés de condensations. Les réflexions que Bouguer a faites sur ce sujet, dans le mémoire déjà cité, peuvent servir à dénouer cette espèce de paradoxe, ou à lever la contradiction apparente qui se trouve entre la loi incontestable, que *la force élastique d'une masse d'air est proportionnelle à sa densité*, et le fait que *les forces élastiques des couches de*

l'atmosphère s'écartent quelquefois de cette loi, qu'elles suivroient constamment, si aucune cause accidentelle et locale n'y mettoit obstacle.

II. Plusieurs physiciens ont dit que la chaleur qu'on éprouve proche la surface de la terre, altéroit la seconde loi ou troubloit la progression géométrique que devroient suivre les dilatations ou les condensations de l'air à différentes hauteurs. « Il est » vrai, dit Bouguer, que cette considération est » importante, et qu'elle sert quelquefois à résoudre » la difficulté; mais le plus souvent elle ne fait que » l'augmenter : la chaleur est plus forte en bas qu'à » une certaine hauteur, et cependant l'air en bas » est presque toujours plus condensé à proportion » que ne le comporte la règle proposée : si l'on » cherche la hauteur d'une montagne de 3 à 400 » toises, en prenant pour terme de comparaison » des montagnes encore moins hautes, on se trom» pera presque toujours par défaut; preuve certaine » que les quantités d'air indiquées par les hauteurs » du mercure dans le Baromètre, occupent à pro» portion moins d'espace proche de terre, qu'à une » certaine hauteur, et que l'air inférieur a moins » d'élasticité, malgré l'action de la chaleur qui » travaille à l'augmenter ».

Il existe donc quelque cause physique, soit solitaire, soit combinée avec la chaleur et les mouvemens qui peuvent agiter l'air; d'où résulte un trouble dans la progression géométrique des dilatations ou condensations de l'air, à différentes hau-

teurs. Bouguer cherche cette cause dans une *inégalite d'intensité* de la vertu élastique qui anime les molécules aériennes.

III. Les philosophes reconnoissent aujourd'hui qu'il n'existe point de corps dans la nature, qui soient parfaitement égaux en figures ou en dimensions. Qu'on prenne sur le bord d'une rivière un amas de sable; qu'on examine les grains avec la loupe; on n'en trouvera pas deux qui se ressemblent exactement, soit pour la grosseur, soit pour la configuration. Leibnitz a le premier remarqué expressément cette *dissemblance* générale dans la nature, et il en a formé le fameux *principe des indiscernables*, ainsi nommé, parce qu'il bannit de l'univers les êtres similaires et indiscernables *. Or, pourquoi n'appliqueroit-on pas cette loi générale aux particules aériennes? Quoiqu'elles échappent à nos regards, ne devons-nous pas supposer, par analogie, qu'elles sont inégales en masses, et qu'elles ont des forces élastiques d'une *intensité* différente, de même à-peu-près que l'intensité de la pesanteur qui fait tomber un corps verticalement, est différente de l'intensité de la pesanteur relative qui le feroit glisser sur un plan incliné? Cela n'empêchera pas que l'air ne soit un fluide uniforme, autant, du moins, que la nature peut admettre ces sortes de corps, puisqu'il formera par parties finies

* Suivant ce principe, lorsqu'en parlant de corps physiques, on dit *corps égaux*, *corps semblables*, il ne faut entendre que des à peu-près.

des masses ou des volumes sensiblement les mêmes, en parité de circonstances. Supposons donc que les molécules élémentaires de l'atmosphère soient douées de diverses forces élastiques. D'un autre côté, supposons que, par une cause quelconque, deux volumes égaux d'air viennent à contenir, en quantités sensiblement différentes, des molécules d'une élasticité différente, de sorte que les élasticités totales et résultantes soient sensiblement inégales; il est évident que, quoique les dilatations ou condensations de ces deux volumes d'air, suivent, pour chacun en particulier, une progression géométrique, les deux progressions n'auront pas la même raison, et que par conséquent on ne pourroit rapporter un terme d'une progression à l'autre qu'au moyen d'une *équation* qui fît disparoître cette différence. Ainsi, dans cette hypothèse, il faudra faire quelques changemens ou modifications à la règle proposée, pour en pouvoir tirer des résultats comparables entr'eux, d'un endroit à l'autre.

IV. On voit d'abord par-là qu'elle doit exiger quelque correction pour les lieux bas, tandis qu'elle s'applique immédiatement et sans craindre d'erreur sensible aux parties supérieures de l'atmosphère : car dans les endroits bas, l'air est ordinairement fort agité; toujours en action par son ressort, il cherche continuellement un équilibre qu'il ne trouve jamais; il règne dans ces endroits des vents contraires qui se choquent et se repoussent; les alternatives du chaud et du froid y sont quelquefois très-grandes;

l'air de l'atmosphère se charge sans cesse du nouvel air qui se dégage des corps terrestres; les pluies abondantes détendent ou affoiblissent le ressort de l'air, etc. Toutes ces circonstances doivent produire un grand nombre de variétés dans les densités de l'air. « Au contraire, vers le haut de l'atmosphère, » l'état de l'air est plus permanent, quant à la dilatation ou condensation du fluide; les vents y sont » comme de larges fleuves qui marchent d'un mouvement uniforme et horizontal; et s'ils se rencontrent, ils passent aisément au-dessus ou au-dessous les uns des autres, sans occasionner une » nouvelle compression. De plus, tout l'air également élastique s'étant placé à une certaine distance de la terre, et y formant une couche ou » tranche plus ou moins épaisse, selon que la quantité de cet air dont le ressort a la même intensité, » est plus ou moins grande, il est absolument indifférent, dans tout cet espace, que certaines parties » soient portées plus haut ou plus bas; elles font » précisément l'effet de celles dont elles prennent » la place »; et par-là il ne peut arriver que des changemens légers ou insensibles dans la progression géométrique des dilatations ou condensations. Tout cela est prouvé par l'expérience.

V. Par les mêmes considérations, on voit que dans la recherche de la hauteur des montagnes par le Baromètre, on se trompe, en partant du niveau de la mer comme premier terme. On doit au contraire prendre le terme de comparaison dans un endroit

endroit élevé, où l'état de l'air est plus constant qu'aux environs de la mer. Les expériences de Bouguer, sur les hautes montagnes du Pérou, paroissent très-propres à fournir les bases de ces déterminations, comme ayant été faites avec tout le soin possible, par un homme qui joignoit à un profond savoir en géométrie, les connoissances de physique les plus étendues, et un long usage des instrumens tant physiques qu'astronomiques.

En adoptant ces bases, il faut être prévenu que les circonstances où l'auteur se trouvoit l'ont toujours obligé de charger ses Baromètres sans faire chauffer le mercure. Il se contentoit, suivant l'ancien usage, de faire sortir les plus grosses bulles d'air par un renversement alternatif du tube, et de ramasser les plus petites avec un fil-de-fer, pour les chasser. Lorsqu'on aura donc des expériences faites de la même manière sur les plus hautes montagnes d'Europe, on pourra trouver, par la règle proposée, combien elles sont moins élevées que celles de la Cordelière du Pérou, et on en inférera ensuite la hauteur absolue. Ainsi, par exemple, le P. Sébastien Truchet observa sur le *Mont-d'Or*, qui est la plus haute montagne de l'Auvergne, que le mercure se soutenoit dans le Baromètre à 22 pouces 2 lignes : cette hauteur, comparée à 15 pouces 11 lignes, qui est la hauteur du mercure sur *Pitchincha*, fera connoître que le Mont-d'Or est moins haut que l'autre montagne de 1391 toises. Et comme Bouguer a trouvé d'ailleurs (*Fig. de la*

terre, pag. 166), que la hauteur de Pitchincha, au-dessus du niveau de la mer, est de 2434 toises; on voit que la hauteur du Mont-d'Or, au-dessus du niveau de la mer, sera de 1043 toises; ce qui ne diffère que de quatre toises de la hauteur 1047 toises, déterminée géométriquement par Jacques Cassini (*Mém. de l'Acad.* 1705, pag. 219).

VI. Quoique dans cet exemple la règle proposée ait donné un résultat assez exact, elle y auroit cependant encore besoin d'une petite correction. Pour parvenir à quelque généralité sur cette matière, observons que dans tous les cas *l'équation* qu'il faudra appliquer à la règle, aura toujours une liaison nécessaire avec les *irrégularités relatives* des forces élastiques, puisque la progression géométrique des densités auroit exactement lieu (sauf néanmoins les petites erreurs négligeables), s'il n'existoit pas de telles irrégularités. Il ne s'agit donc plus que de déterminer par quelque moyen sûr et commode la loi des forces élastiques à différentes hauteurs de l'atmosphère.

VII. Il est évident qu'on atteindroit au but, en pesant, avec d'excellentes balances, des volumes égaux d'air, aux endroits où l'on veut trouver le rapport des forces élastiques. Par cette méthode, il suffit de voir combien il s'en faut que les poids de ces volumes d'air répondent aux forces de compression. La colonne d'air, qui agit sur le mercure du Baromètre, devenant plus ou moins longue à mesure que l'on descend ou que l'on monte; si vous

trouvez que le poids d'un certain volume d'air change précisément suivant le même rapport que la pesanteur ou la hauteur de la colonne de mercure dans le Baromètre, vous conclurez que l'élasticité spécifique de l'air demeure la même, et que par conséquent la règle n'a pas besoin de correction; si vous trouvez de la différence dans les rapports, l'élasticité sera différente, et il faudra appliquer une équation à la règle. Rien n'est plus direct et plus simple que ce moyen dans la théorie; mais dans la pratique, il demande un appareil embarassant pour un homme qui voyageoit sur les montagnes du Pérou. Bouguer préféra l'usage du *pendule*, imitant en cela l'exemple de Newton, qui avoit déjà employé le même procédé pour déterminer les résistances des corps mus dans divers milieux.

VIII. On sait que le mouvement d'un Pendule qui oscille en plein air diminue peu-à-peu, et que la diminution en un temps donné est proportionnelle à la densité de l'air dans l'endroit de l'expérience; ou, ce qui est la même chose, que la densité de l'air est en raison inverse du nombre d'oscillations que le pendule fait pendant que l'excursion initiale se réduit à une partie donnée de cette même excursion.

Le pendule de Bouguer pesoit 2 livres 6 gros, et il étoit suspendu par un fil de 6 pieds de longueur. Comme il falloit, pour la commodité des expériences, que sous une petite masse le pendule présentât une grande surface au choc de l'air, afin de

perdre en peu de temps une partie considérable de son mouvement, on le fit creux, et sa surface étoit équivalente à une surface cylindrique de 66 pouces quarrés. Par-là, on avoit un autre avantage. En introduisant dans le creux du Pendule des petits poids, tels que des balles, des grains de plomb, on augmentoit son poids total, et on faisoit ensorte que le pendule employât le même temps dans un air rare que dans un air dense, à perdre une partie donnée de son mouvement : autre manière de comparer les densités de l'air, en confirmation de la première.

On avoit réglé à 100 lignes la demi-excursion initiale du Pendule, c'est-à-dire, l'arc compris depuis le point de départ du pendule au premier instant, jusqu'à la verticale; et à 80 lignes la demi-excursion finale. La question étoit ensuite, ou de compter les oscillations que le pendule, demeuré constant en poids, faisoit pendant que l'arc de 100 lignes se réduisoit à 80; ou de déterminer le poids total qu'il falloit donner au pendule, pour que cette réduction se fît en un temps donné. Par le choix de ces dimensions et de ces mesures, les diminutions successives des oscillations s'appercevoient distinctement, et on n'avoit point à craindre, d'un autre côté, que la tenacité de l'air influât, au moins sensiblement, sur les résultats.

A Quito, où le mercure se soutenoit dans le Baromètre à 20 pouces 1 ligne, l'arc de 100 lignes se réduisit à 80 lignes, en 147 $\frac{2}{5}$ oscillations. Lors-

qu'en montant ou en descendant, on passoit dans un air plus rare ou plus dense, la réduction se faisoit en plus ou moins de temps. Les vitesses du Pendule étoient très-sensiblement les mêmes dans toutes ces expériences; et par conséquent les différences observées n'étoient produites que par la seule densité plus ou moins grande de l'air. Les oscillations simples étoient d'environ une seconde et demie de temps. Elles n'avoient pas rigoureusement la même durée dans tous les lieux; mais les différences étoient si légères, qu'on n'avoit pas à craindre de-là une source d'erreurs.

On étoit donc sûr qu'on déterminoit avec une exactitude suffisante le rapport entre la densité de l'air à Quito, et la densité en un autre lieu, par le *rapport inverse* des nombres d'oscillations que le pendule faisoit en ces deux endroits, pendant que l'arc de 100 lignes se réduisoit à 80; ou par le *rapport direct* des poids qu'il falloit donner au pendule pour que la même réduction se fît en un temps connu, tel que 147 $\frac{2}{5}$ oscillations. Ces deux moyens donnèrent les mêmes résultats pour les densités de l'air : l'un et l'autre firent également connoître que dans tout le haut de la Cordelière, il existoit un rapport constant entre les densités de l'air et les forces comprimantes; de sorte que *l'intensité* de la force élastique étoit la même dans tous ces endroits; ce qui étoit conforme aux déterminations des hauteurs, données exactement et immédiatement par les seuls logarithmes.

Il n'en fut pas de même, lorsque Bouguer commença à s'éloigner du Pérou, pour revenir en Europe; il ne trouva plus cette égalité d'*intensité* dans la vertu élastique de l'air. Par exemple, à *Popayan*, ville qui est située dans l'intérieur de la Cordelière, en un endroit où le chaud est déjà fort grand, et qui est moins élevée que Quito au-dessus de la mer, le mercure se soutenoit dans le Baromètre à 22 pouces 10 $\frac{2}{5}$ lignes. En comparant cette hauteur avec la hauteur 20 pouces 1 ligne, où le Baromètre se soutenoit à Quito, on voit que les forces comprimantes de l'air à Popayan et à Quito, sont entr'elles comme les deux nombres 22 pouces 10 $\frac{2}{5}$ lignes et 20 pouces 1 ligne, c'est-à-dire, comme les deux nombres 824 et 723. Par conséquent, si l'intensité de la vertu élastique étoit la même dans les deux endroits, ou si les densités étoient proportionnelles aux forces comprimantes; en faisant cette proportion, 824 : 723 :: 147 $\frac{2}{5}$ oscillations : un quatrième terme, ce quatrième terme 129 $\frac{1}{5}$ oscillations à très-peu de chose près, seroit le temps que le pendule devroit employer, pour qu'à Popayan l'arc de 100 lignes se réduisit à 80. Mais l'expérience a fait connoître que cette réduction s'opéroit en 125 ou 126 oscillations. D'où il suit que la densité étoit comparativement plus grande à Popayan, qu'elle n'auroit dû l'être; ou que l'*intensité* de la vertu élastique de l'air à Popayan, étoit moindre qu'à Quito et que dans le haut de la Cordelière, puisque cette force cédoit plus à la compression,

dans le premier de ces endroits, que dans les autres. Bouguer trouva dans les circonstances locales la cause de cette augmentation de densité de l'air à Popayan. « Le sol du pays où cette ville est située est » en partie couvert de bois, et n'est presque que de » l'argille pénétrée d'eau ; il n'est donc pas étonnant » que cette eau, continuellement enlevée par la » chaleur et dispersée dans l'atmosphère, rendit le » total de la masse moins élastique qu'elle ne l'étoit » dans d'autres endroits plus découverts, moins hu- » mides ou plus hauts ». Aussi, Bouguer, en descendant de Popayan, trouva-t-il que l'élasticité de l'air alloit en augmentant jusqu'à la hauteur de deux cents toises au-dessus du niveau de la mer : après quoi elle commença à diminuer.

IX. D'après toutes ces observations, il se présente un moyen de déterminer, par la combinaison du Baromètre et du Pendule, les hauteurs des montagnes médiocrement élevées, qu'on ne pouvoit déterminer avec une précision suffisante par le seul Baromètre. Lorsque vous verrez, par le Pendule, que les densités à Quito et dans un autre lieu A, sont proportionnelles aux forces comprimantes indiquées par les hauteurs du mercure dans le Baromètre aux deux endroits, vous conclurez que l'intensité de la force élastique est la même dans le lieu A qu'à Quito; et vous trouverez la différence de niveau de ces deux endroits, par les seuls logarithmes, sans le secours d'aucune équation. Mais lorsque la proportion dont il s'agit n'aura pas lieu, il faudra

faire une petite augmentation ou une petite diminution à la hauteur donnée par les logarithmes, ou par le Baromètre, selon que le Pendule aura fait connoître, par sa comparaison avec le Baromètre, que l'air est moins ou plus condensé qu'il ne devroit l'être naturellement.

Dans le cas où un Pendule de 6 pieds de longueur, tel que celui de Bouguer, paroîtroit trop embarassant, on pourroit y en substituer un autre qui fît exactement le même effet, en changeant le poids, ou la grandeur de la surface.

X. Il reste encore à connoître la loi que suit, relativement aux densités de l'air, l'équation additive ou soustractive, qu'il faut employer pour rectifier les déterminations des hauteurs, données par le Baromètre. On est d'abord porté à croire que cette équation ne doit pas être proportionnelle à tout le changement observé dans la densité de l'air, puisque ce fluide devenant plus dense ou plus rare, son volume varie suivant les trois dimensions de l'étendue, et que dans les mesures proposées on ne considère que les variations dans le sens vertical. Il semble donc que la correction doit être environ trois fois moindre que ne le demanderoit tout l'excès ou tout le défaut de densité de l'air. Cela seroit vrai, sans doute, si la condensation étoit uniforme dans l'étendue de chaque couche tout autour de la terre, et si toutes les parties de l'air étoient en repos. Mais le défaut d'équilibre de l'air, et l'agitation continuelle de ce fluide, soit dans un sens, soit

dans un autre, produisent nécessairement des changemens considérables dans les dilatations ou les condensations. C'est à l'expérience, seul juge irréfragable dans les matières de physique, à prononcer décisivement. Bouguer a trouvé par cette voie qu'il falloit augmenter ou diminuer les hauteurs données par les logarithmes, à proportion de tout le défaut ou l'excès de condensation. Du moins, il a été obligé d'employer une correction aussi forte pour toutes les parties de la hauteur de la Cordelière, trouvées séparément, afin qu'elles fissent par leur somme la hauteur totale. Il en fut de même au *piton du petit Goove*, montagne de Saint-Domingue, sur laquelle l'auteur monta, exprès pour cette opération, à son retour. Malgré les lumières que les travaux de ce grand géomètre physicien ont répandues sur ce sujet intéressant, il a besoin encore de nouveaux éclaircissemens : aucun n'offre peut-être un plus vaste champ de recherches aux observateurs, et à la sagacité des savans.

XI. Quoique nous ayons dit ou supposé dans ce qui précède que l'air le plus élastique devoit naturellement se trouver dans la partie supérieure de l'atmosphère, il ne sera peut-être pas inutile d'ajouter encore ici à ce sujet une remarque théorique, et comme indépendante de toute expérience.

L'arrangement des molécules de l'atmosphère ne doit pas être attribué, si ce n'est partiellement et accidentellement, à l'action de la chaleur; car nous avons vu (II) que la densité de l'air est ordi-

nairement plus grande dans les endroits bas où la chaleur est quelquefois fort grande, que dans les endroits élevés où l'air est plus froid; tandis que cependant une plus grande chaleur, produisant une plus grande dilatation, doit diminuer la densité. Il faut donc chercher la cause principale de l'arrangement des molécules aériennes, dans la constitution même du fluide. Or, parmi ces molécules, il est évident que les plus roides, ou celles dont l'*intensité* du ressort est la plus forte, souffrant un moindre affaissement, un moindre rapprochement mutuel de leurs centres respectifs, doivent moins se condenser, ou former une moindre masse, sous un volume donné, que les particules plus flexibles, ou d'une moindre vertu élastique. Ainsi, les parties les plus élastiques de l'air doivent gagner le haut de l'atmosphère, et les parties les moins élastiques doivent occuper le bas, où elles formeront un air plus dense ordinairement qu'il ne devoit l'être à raison des forces comprimantes. Entre ces deux points extrêmes se placeront les parties d'élasticité moyenne. J'ai dit *ordinairement*, car il peut se faire que la chaleur ou d'autres causes locales changent ce résultat. Quoiqu'il en soit, le Baromètre et le Pendule feront toujours connoître le rapport de la densité de l'air en un endroit quelconque, à la densité de l'air à Quito, d'où est supposée partir la base de toutes les déterminations.

S'il n'étoit question que d'un équilibre purement mathématique, on pourroit concevoir qu'on a posé

d'abord en bas de l'atmosphère des couches de l'air le plus élastique; puis des couches de l'élasticité moyenne; enfin, des couches de la moindre élasticité. Il est même possible que, par une cause accidentelle et momentanée, l'atmosphère prenne une disposition à-peu-près semblable à celle dont nous parlons: mais un tel arrangement ne comporte pas ce qu'on appelle en méchanique, *un état d'équilibre ferme*. La moindre force seroit capable de le troubler. Or, dans les agitations continuelles de l'atmosphère, il existe toujours plusieurs forces perturbatrices d'un ordre qui ne porte pas avec soi un principe de conservation. La véritable situation d'équilibre ferme et permanent, est celle où les molécules les plus élastiques se trouvent en haut, et les moins élastiques en bas. Lorsque cet état vient à être dérangé, il tend à se rétablir par sa propre nature; et il a lieu le plus habituellement, malgré les altérations produites par les mouvemens de l'air.

CHAPITRE X.

Remarques générales sur la construction et les variations du Baromètre : principes du Thermomètre : usage de ces deux instrumens combinés ensemble, pour déterminer les hauteurs des montagnes.

115. LE Baromètre et le Thermomètre sont deux instrumens d'une utilité si universelle dans la physique et même dans plusieurs arts de nécessité première, qu'on ne sauroit trop étudier les moyens de les construire exactement et de les porter au plus haut degré de perfection. J'ai déjà fait connoître l'usage du Baromètre pour déterminer les hauteurs des montagnes. Il s'agit maintenant de considérer la structure même de cet instrument, et les variations auxquelles la colonne de mercure est sujette dans un même lieu. De-là je passerai à la construction du Thermomètre. Enfin j'expliquerai les secours que l'on a tirés du Thermomètre pour rectifier les erreurs qui se trouvent souvent dans les déterminations des hauteurs des montagnes par le Baromètre.

Théorie générale du Baromètre.

116. Aussitôt que Toricelli eut fait connoître la pesanteur de l'air, par la suspension d'une colonne

de mercure dans un tube renversé et fermé hermétiquement par en haut, on employa, comme je l'ai déjà dit, ce principe pour construire le Baromètre ordinaire, qui porte son nom. On a varié dans la suite cet instrument de plusieurs manières, qui peuvent avoir leurs avantages particuliers, suivant les usages auxquels on le destine. Mais le fond est toujours le même; et le Baromètre de Toricelli, le plus simple de tous dans l'idée principale et commune, est aussi le plus facile à exécuter avec précision, et le plus commode pour la plupart des expériences. Il nous suffira donc ici d'en examiner le méchanisme.

117. Comme dans les premiers Baromètres que l'on fit, on n'avoit pour objet que de connoître le poids de l'air par la hauteur de la colonne de mercure suspendue, on ne se mit d'abord guères en peine de la qualité du mercure. On se contentoit de dépouiller ce fluide des parties grossières qu'il contenoit, en le faisant passer au travers d'une peau de chamois; mais on sentit bientôt que cette manière de purifier le mercure étoit très-insuffisante et même équivoque; la chymie fournit pour cela d'autres moyens beaucoup plus exacts et plus sûrs, comme on peut le voir dans les ouvrages qui traitent de ces matières. Il falloit de plus savoir expulser les bulles d'air qui peuvent se cantonner dans la partie supérieure du tube, ou s'insinuer dans le mercure même. On y parvient, en secouant légèrement la colonne, en même temps que l'on remue

le mercure avec un fil de fer : à quoi l'on peut ajouter la précaution très-efficace de passer et de tourner la colonne sur le feu modéré d'un réchaud. Les Baromètres ainsi construits jettent de la flamme dans la partie supérieure du tube, quand on les agite dans l'obscurité.

118. Il s'étoit introduit aussi un défaut essentiel dans les premiers Baromètres, parce que l'on ne connoissoit pas alors l'extrême sensibilité du mercure aux impressions du chaud et du froid. Dans la vue de rendre ces instrumens plus légers, on employoit de minces tubes, où la colonne de mercure éprouvoit des variations sensibles dans sa hauteur, par l'action du chaud ou du froid; de sorte que cette hauteur n'exprimoit plus simplement le poids de l'air, mais qu'une partie étoit relative à la température actuelle de l'air. Lorsqu'on eut remarqué cet inconvénient, on vit qu'il ne falloit pas se contenter de faire les observations du Baromètre à l'abri du soleil : on prit de plus le parti d'employer des tubes d'un calibre un peu grand, sauf néanmoins l'attention de ne pas rendre l'instrument trop pesant. Par-là, on remplit deux objets : les variations de hauteur, résultantes de l'élasticité du mercure, deviennent moindres par rapport à la hauteur totale; et on évite l'effet de la *capillarité* qui a lieu plus ou moins, lorsque le diamètre intérieur du tube n'est pas au moins de deux lignes.

119. Telles étoient à peu-près les connoissances

théoriques et expérimentales d'après lesquelles on construisoit les Baromètres, lorsque le célèbre Daniel Bernoulli, dont la sagacité à pénétrer les secrets de la nature étoit extrême, fit, dans sa pièce *sur les courans de la mer*, couronnée en 1751, par l'Académie des Sciences de Paris, une observation importante, qui avoit échappé jusqu'alors à tous les physiciens, et qui demandoit de nouvelles précautions dans la construction du Baromètre. Nous ne pouvons mieux faire que de la rapporter dans les propres termes de l'auteur. » Elle consiste, dit-il, » en ce que tous les fluides forment autour d'eux, » dans le vuide, une atmosphère ou une vapeur » élastique. Ces vapeurs ont des propriétés singu- » lières. Plusieurs expériences que j'ai faites, avec » une excellente pompe pneumatique, m'ont d'abord » fait remarquer l'activité de ces vapeurs : j'obser- » vois que le mercure dans l'*index* appliqué à la » pompe, ne montoit jamais si haut, qu'il se tenoit » dans un bon Baromètre; ce défaut étoit ordinai- » rement de 4 à 5 lignes; et quand il faisoit bien » chaud, il alloit jusques à 8 lignes. La pompe étoit » cependant parfaitement bonne, et le vuide s'y » conservoit pendant plusieurs jours de suite. Je » reconnus donc qu'une certaine vapeur élastique, » qui se formoit toujours à mesure qu'on la pom- » poit, en étoit la véritable cause. La plus petite » humidité suffit pour fournir une quantité immense » de ces vapeurs ».

A la suite de ces raisons qui établissent l'existence

des vapeurs élastiques, l'auteur propose quelques conjectures sur la nature de ce fluide. Continuons de l'écouter.

» 1°. Il m'a paru que l'activité des vapeurs n'est » pas augmentée en les resserrant dans un plus petit » espace; c'est qu'à mesure qu'on resserre les va- » peurs, les parties se réunissent et reprennent la » forme du fluide primitif. 2°. L'activité de ces » vapeurs est augmentée par une plus grande chaleur » et diminuée par un plus grand froid. 3°. Il m'a » paru que ces vapeurs demandent un certain degré » de chaleur déterminé pour se former, et qu'au- » dessous de ce degré elles ne se forment point du » tout; voici ce qui m'a induit à former cette hy- » pothèse. J'avois un Baromètre à double branches, » l'une remplie de mercure, et l'autre d'huile de » tartre, qui étoit fort bien fait, et qui ne me pa- » roissoit aucunement sensible aux changemens du » froid et du chaud; ayant une fois couché ce Ba- » romètre sur la table et puis l'ayant relevé, je fus » fort surpris de voir cet instrument changé en » Thermomètre extrêmement sensible; cependant » il ne s'étoit absolument point glissé d'air dans la » boule d'en haut, et d'ailleurs les changemens » thermométriques étoient de beaucoup trop grands » pour être attribués à cette cause; je reconnus enfin » qu'il s'étoit glissé une petite quantité, presque » imperceptible, d'huile de tartre au-dessus de la » surface du mercure dans la boule d'en-haut, la- » quelle, par l'élasticité de sa vapeur, produisoit le » phénomène

» phénomène en question; je fis long-temps des
» observations avec cet instrument, et l'ayant une
» fois exposé à un grand froid d'environ onze degrés
» au-dessous de zéro du Thermomètre de M. de
» Réaumur, je remarquai qu'il ne varioit plus sen-
» siblement, quoique le Thermomètre simple mis
» à côté eût baissé de trois degrés, et que le Baro-
» mètre n'eût point changé pendant cette augmen-
» tation de froid. 4°. Tous les fluides fournissent
» une telle vapeur; mais l'élasticité respective pour
» un même degré de chaleur n'est pas la même:
» le mercure n'en est pas exempt; mais s'il est tout
» à fait bien purifié, l'activité de sa vapeur est
» presque insensible. J'ai approché la flamme d'une
» bougie de l'extrémité du mercure d'un Baromètre
» lumineux jusqu'à faire bouillonner le mercure;
» il ne descendoit que de quelques lignes, pendant
» que dans d'autres Baromètres dont le vuide étoit
» également parfait, mais dont le mercure n'étoit
» pas purifié, j'ai pu faire descendre le mercure
» d'autant de pouces qu'il y avoit de lignes dans le
» premier; peut-être aussi que les tuyaux des autres
» Baromètres renfermoient une petite humidité. Je
» conclus de ces remarques, que pour obvier à
» l'inconvénient desdites vapeurs élastiques, il faut
» se servir de tuyaux parfaitement secs et les rem-
» plir d'un mercure bien purifié, et enfin examiner
» les Baromètres ainsi construits, par la flamme
» d'une bougie de la façon que je viens de le dire».

En joignant ces attentions à celles qui ont été déjà

prescrites, on construira des *Baromètres parfaits*, non de la perfection absolue, qui n'a jamais lieu dans les ouvrages des hommes, mais de cette perfection relative à laquelle l'art actuel peut atteindre. Je renvoie pour de plus amples détails sur la construction du Baromètre, aux excellentes *recherches* de M. de Luc, *sur les modifications de l'atmosphère.*

120. Si, malgré tous les soins dont on vient de parler, il arrivoit qu'il restât une petite quantité d'air, ou de vapeur élastique, dans le Baromètre, au haut du tube, on en détermineroit facilement l'effet par le calcul. Je suppose donc, pour établir ce problème, qu'il y ait effectivement au haut du tube une telle portion de fluide élastique. Qu'elle soit de l'air ou de la vapeur, elle peut toujours être considérée comme de l'air, puisque la loi de la compressibilité doit être la même pour tous les fluides élastiques, c'est-à-dire, que dans tous la force comprimante, ou la force élastique suit le rapport inverse des volumes. Le principe de la solution sera donc ainsi le même qui a été déjà employé dans la théorie des pompes.

121. Problème. *Le haut du tube d'un Baromètre contenant une petite portion d'air, on demande une équation entre la pression de l'atmosphère, la hauteur du tube, celle du mercure, et celle de la portion d'air enfermée.*

Supposons (*Fig.* 30) que dans le Baromètre imparfait dont il est ici question, AB soit la hauteur totale du tube, AE celle du mercure, BH l'étendue en longueur que l'air enfermé occuperoit, s'il

étoit placé au dehors ou dans l'atmosphère, BE l'étendue en longueur sur laquelle il se dilate dans le tube. Le poids de la colonne de mercure et la force élastique de l'air enfermé au haut du tube, doivent faire équilibre à la pression de l'atmosphère sur la surface du mercure contenu dans la cuvette du Baromètre; et comme ces trois forces sont proportionnelles aux bases qu'elles pressent, l'équilibre aura lieu, si, en réduisant ces mêmes forces à des colonnes de mercure, la somme des deux premières hauteurs est égale à la troisième. Soient $AB=u$; $AE=a$; $BH=y$; et nommons h la hauteur de la colonne de mercure, qui exprime la pression de l'atmosphère, hauteur qui est donnée par celle du mercure dans un Baromètre parfait. La hauteur dûe à la force élastique de l'air enfermé dans le tube est (68) $h\times\frac{BH}{BE}=\frac{hy}{u-x}$. On aura donc pour l'équilibre, $x+\frac{hy}{u-x}=h$; ou $ux-xx+hy=hu-hx$: équation qui renferme la relation entre les quatre quantités h, x, u, y, c'est-à-dire, entre la hauteur du mercure dans un Baromètre parfait, sa hauteur dans notre Baromètre imparfait, la hauteur du tube de ce Baromètre et la hauteur dûe à la pression de l'air qui y est enfermé. Quant à la hauteur du tube du Baromètre parfait, laquelle n'entre point dans l'équation, il est évident qu'en effet elle ne doit pas y entrer, puisqu'on suppose qu'il existe un vuide parfait dans la

partie supérieure de ce tube. Je n'ai pas besoin d'ajouter que les quatre quantités h, u, x, y sont ici toujours positives, et qu'on ne pourroit les regarder comme négatives que d'une manière hypothétique et étrangère au problême.

122. *Corollaire.* Connoissant trois quelconques des quatre quantités h, u, x, y, on connoîtra la quatrième. Les valeurs de h, u, y sont données par des équations du premier degré; mais celle de x le sera par une équation du second degré, et on trouvera

$$x = \frac{h+u}{2} \pm \frac{\sqrt{(4h(y-u)+(h+u)^2)}}{2}.$$

Dans cette équation, on ne peut jamais supposer $y > u$, autrement la partie seroit plus grande que le tout. Les limites de y sont zéro et u.

1°. Soit d'abord $y = 0$: le signe supérieur du radical donnera $x = \frac{h+u}{2} + \frac{h-u}{2} = h$; ce qui est le cas du Baromètre parfait. Le signe inférieur donne $x = \frac{h+u}{2} - \frac{h-u}{2} = u$, solution qui ne peut être admise, qu'en supposant que u soit moindre que h, ou du moins ne surpasse pas h, puisque le mercure ne peut jamais avoir dans le tube AB une hauteur plus grande que dans le Baromètre parfait.

2°. Soit $y = u$: le signe supérieur du radical donneroit $x = \frac{h+u}{2} + \frac{h+u}{2} = h+u$, ce qui ne peut pas être, à moins que u ne fût zéro, et alors

il n'y auroit point de Baromètre : le signe inférieur donneroit $x=0$, et le mercure ne s'éleveroit point dans le Baromètre imparfait.

3°. Soit la valeur de y, comprise entre les limites o et u, c'est-à-dire, plus grande que zéro, et moindre que u. Alors il est évident que la quantité radicale étant réelle, il faut prendre seulement le signe inférieur du radical, sans quoi la valeur de x seroit plus grande que h, ce qui est impossible. La solution du problême est donc donnée par la formule

$$x=\frac{h+u}{2}-\frac{\sqrt{(4h(y-u)+(h+u)^2)}}{2}.$$

Les applications numériques n'ont aucune difficulté.

Variations du Baromètre dans un même lieu.

123. J'ai déjà remarqué que la pression de l'atmosphère dans un même lieu est sujette à de fréquentes variations, qui font monter plus ou moins la colonne de mercure dans le Baromètre. Voici les phénomènes les plus généraux qu'on a observés à ce sujet.

1°. Ordinairement le mercure se tient élevé lorsque le temps est beau, fixe, calme et sec ; au contraire, le mercure s'abaisse quand le temps devient changeant, pluvieux, orageux, et que l'air est agité par de grands vents ou fort chargé de vapeurs.

2°. Les plus grandes hauteurs et les plus grands abaissemens du Baromètre, arrivent toujours en hiver ; et plus dans un même climat les vicissitudes du chaud et du froid sont grandes, plus aussi les variations du Baromètre sont considérables.

3°. Sur les hautes montagnes, les variations du

Baromètre sont très-petites, et quelquefois presque nulles : alors, on trouve avec exactitude les différences de niveaux des lieux, par le moyen de cet instrument, comme nous l'avons vu.

4°. Dans le voisinage de l'Équateur, les variations du Baromètre sont beaucoup moins sensibles que vers les pôles. Par exemple, à Quito, la hauteur de la colonne de mercure ne varie tout au plus que d'une ligne et demie; et en bas, au bord de la mer, de deux lignes et demie ou trois lignes : à Paris, la variation est de plus de vingt-six lignes.

5°. Si dans un même lieu il arrive, par un beau temps, que le mercure vienne à descendre, il y aura de la pluie ou du vent; si au contraire dans un temps pluvieux le mercure vient à monter, c'est signe d'un prochain beau temps; dans un temps fort chaud, la descente du mercure prédit le tonnerre; dans un temps froid, l'ascension du mercure annonce la gelée; au contraire la descente du mercure par un temps de gelée, prédit le dégel.

Toutes ces indications du Baromètre ne sont pas toujours infailliblement suivies des mêmes effets; et quelquefois, par exemple, on a de la pluie, quand le Baromètre, suivant ses mouvemens ordinaires, semble promettre du beau temps.

Je joins ici une table que le citoyen Brisson, mon ancien confrère à l'Académie des Sciences, a bien voulu me communiquer, des plus grandes et des moindres élévations du mercure dans le Baromètre, qui ont été observées à Paris, pendant l'espace de 31 années.

HAUTEURS DU BAROMETRE, A PARIS.

	PLUS GRANDE ÉLÉVATION.			PLUS GRAND ABAISSEM.			DIFFÉR.
		po.	lig.		po.	lig.	lig.
1754	13 Sept. soir.	28	7	9 Nov. soir.	26	9 3/4	21 1/4
1755	6 Janv. mid.	28	8	8 Nov. soir.	26	9 1/2	22 1/2
1756	21 Fév. midi.	28	9 1/4	18 Févr. soir.	27	1 1/4	20
1757	28 Fév. midi.	28	8	12 Av. matin.	27	3	17
1758	29 Janv. mid.	28	10	4 Déc. midi.	27	2 1/4	20 3/4
1759	12 Fév. midi.	28	7 3/4	10 Mars mat.	27	1 1/4	18 1/2
1760	8 Mars mat.	28	7 1/2	23 Oct. midi.	27	2 3/4	16 1/4
1761	13 Janv. mat.	28	10 1/4	14 Nov. midi.	27	1 1/2	20 3/4
1762	29 Janv. mid.	28	7	30 Mars mid.	26	8	23
1763	14 Nov. soir.	28	6 1/3	12 Déc. soir.	26	8 1/2	21 5/6
1764	15 Mars mid.	28	7	9 Avr. midi.	27	2 1/4	16 3/4
1765	12 Avr. midi.	28	6 1/4	28 Fév. mat	26	11	19 1/4
1766	29 Janv. mid.	28	9	26 Mars midi.	27	2 1/2	18 1/2
1767	20 Sept. soir.	28	6 1/4	13 Janv. soir.	27	3	15 1/4
1768	19 Mars mat.	28	6 2/3	22 Nov. midi.	26	9 1/8	21 13/24
1769	28 Nov. mat.	28	9 1/3	23 Déc. soir.	27	1	20 1/3
1770	28 Janv. soir.	28	9 3/4	20 Nov. midi.	27	2	19 3/4
1771	18 Fév. midi.	28	6 1/2	16 Déc. midi.	27	3 1/4	15 1/4
1772	25 Déc. mat.	28	5 2/3	16 Janv. soir.	27	7/8	17
1773	4 Févr. mat.	28	8 2/3	24 Sept. soir.	27	1 1/2	19 1/6
1774	24 Déc. mat.	28	8 1/2	24 Janv. mat.	27	4	16 1/2
1775	11 Déc. mat.	28	9	13 Fév. midi	27	3 7/8	17 1/8
1776	11 Déc. midi.	28	8 1/3	11 Fév. soir.	27	2 3/4	18 1/12
1777	11 Déc. midi.	28	10	16 Mars mid.	27	3 1/2	18 1/2
1778	26 Déc. soir.	28	10 7/8	14 Janv. mid.	27	0	22 7/8
1779	17 Fév. soir.	28	9 1/4	21 Déc. soir.	27	0	21 1/4
1780	6 Mars mat.	28	8 3/4	3 Avr. mat.	27	1 3/8	19 3/8
1781	8 Oct. mat.	28	6 5/8	15 Nov. soir.	27	4 1/2	14 1/8
1782	20 Déc. mat.	28	10	1 Avril soir.	27	1/2	21 1/2
1783	6 Avr. mat.	28	7 3/4	6 Mars mat.	26	10 3/4	21
1784	4 Fév. mat.	28	7	17 Janv. soir.	26	11	20

K iv

Durant ces 31 années, la plus grande élévation du mercure dans le Baromètre a été de 28 pouces 10 $\frac{7}{8}$ lignes, le 26 décembre 1778, le soir.

Son plus grand abaissement a été de 26 pouces 8 lignes, le 30 mars 1762, à midi.

La différence est de 26 $\frac{7}{8}$ lignes.

Les Physiciens se sont mis à la torture pour trouver la cause des variations du Baromètre. Mon objet n'est pas de faire l'énumération des systêmes qu'ils ont imaginés sur ce sujet : je me borne à donner une idée générale de quelques-uns des principaux.

Systême de Léibnitz.

124. Selon Léibnitz, les vapeurs destinées à former la pluie étant d'abord dispersées et soutenues dans l'atmosphère, elles doivent nécessairement augmenter son poids, et par conséquent aussi la pression que l'air exerce sur la surface du mercure contenu dans la cuvette du Baromètre. Ainsi, tant que les vapeurs flottent dans l'air, ou que le beau temps dure, le mercure doit se tenir haut dans le tube. Mais que les vapeurs poussées par les vents, ou par telle autre cause qu'on voudra imaginer, viennent à s'amonceler : elles forment de petits corps plus pesans spécifiquement que l'air, elles doivent donc tomber en pluie. Or, durant quelles tombent ainsi, elles soulagent l'air d'une partie de leurs poids, conformément aux loix de la Mécanique. En effet, imaginons qu'un corps solide de même pesan-

teur spécifique que l'air, et par conséquent immobile dans l'endroit où il est placé, vienne, par une cause quelconque, à diminuer de volume, sans changer de masse ou de poids; alors ce corps descendra nécessairement, et la partie de son poids qui est employée à le faire descendre, cessera de presser l'atmosphère qui la supportoit auparavant. Le choc que ce corps exerce contre l'air, ne compense pas la diminutiou de pression dont il s'agit, comme on pourra s'en assurer quand on saura déterminer la percussion des fluides: l'air devient donc plus léger lorsque la pluie tombe; et le Baromètre doit baisser. La descente du mercure commence un peu avant la pluie, soit parce qu'il faut un certain temps aux gouttes d'eau pour se former, soit parce que les vents les amènent quelquefois d'endroits fort éloignés. Si la pluie n'est pas toujours la suite de la descente du Baromètre, Léibnitz en attribue la cause aux vents qui emportent ailleurs les gouttes, ou qui les divisent et les dispersent dans l'atmosphère. Assurément ce système est très-ingénieux; il satisfait aux principaux phénomènes de la pluie et du beau temps; mais il n'explique point ceux qui sont relatifs au tonnerre, à la gelée, aux changemens de vents, etc.

Systéme de Hallêy.

125. Halley explique les mouvemens du Baromètre par l'action des vents sur les vapeurs pluviales flottantes dans l'atmosphère. Suivant ses principes,

dans un temps calme et tendant à la pluie, le Baromètre baisse ordinairement, parce que deux vents soufflant en sens contraire, raréfient l'air et le rendent plus léger : dans un temps serein et fixe, le Baromètre est comme le centre où les vents accumulent l'air et le rendent plus pesant; ainsi le Baromètre doit monter : dans un temps calme et froid, le mercure monte, parce qu'alors il arrive du Nord des vents froids qui amoncellent l'air : les plus grandes variations du Baromètre sont au Nord, parce que les vents du Nord sont plus forts et plus variables que ceux du Sud, etc. On voit que ce système est fondé sur plusieurs suppositions, dont quelques-unes sont difficiles à recevoir, ou paroissent même se contredire.

Systême de Mairan.

126. Mairan met en jeu, de même que Halley, l'action des vents ordinaires, pour condenser ou raréfier l'air. De plus, il y ajoute celle du feu central, qui (selon lui) émane continuellement des entrailles de la terre, et qui produit dans l'air des agitations, des mouvemens, dont les quantités et les directions peuvent être modifiées par plusieurs causes physiques et locales : nouveau champ de suppositions insuffisantes ou gratuites.

Systéme moderne.

127. Depuis que le Roi, de la Société de Montpellier, a fait voir (*Mém. de l'Académie, année*

1751, page 481), que l'air tient toujours une certaine quantité d'eau en dissolution, on a cherché à établir sur cette base une nouvelle explication des variations du Baromètre. On suppose que les parties aqueuses, mêlées avec l'air, en diminuent le poids; et cela peut venir, comme M. de Saussure le remarque dans son excellent Traité d'*Hygrométrie*, de ce que les vapeurs se forment par la conversion de l'eau en un fluide élastique, dont le volume, à quantité égale de matière, est beaucoup plus grand que celui de l'air pur. L'hypothèse d'une telle diminution dans le poids de l'air, par l'accumulation des vapeurs pluviales, explique pourquoi l'abaissement du mercure dans le Baromètre est un signe de pluie. L'eau est tenue en dissolution dans l'air par un certain degré de chaleur : quand l'air est saturé d'eau, et qu'il vient à se refroidir, il en abandonne la plus grande partie, qui tombe alors en rosée ou en pluie. Mais en admettant ces effets, on est encore très-éloigné d'y pouvoir trouver la cause des variations du Baromètre; car M. de Saussure prouve, par le raisonnement et l'expérience, que la plus grande différence entre l'air sec et l'air humide, ne peut produire que des variations de deux ou trois lignes dans le Baromètre; ce qui est fort loin de celles que l'on observe dans nos climats. Voyez son ouvrage, *pages* 283 *et suivantes*. Je reviens à ce qui regarde plus spécialement mon sujet.

128. *Remarque*. Amontons, l'un des meilleurs Physiciens du commencement de ce siècle, avoit

avancé (*Mém. de l'Acad.* 1704, pages 164 *et* 271), que la chaleur influe sensiblement sur les variations du Baromètre. Des Savans, trompés par des expériences équivoques, nièrent cette proposition. M. de Luc a trouvé que des Baromètres dont le mercure n'avoit pas été purgé par l'action du feu, étoient sujets à des mouvemens irréguliers par le changement de chaleur; tantôt stationnaires, au moins sensiblement, quand la chaleur augmente; souvent montans, et quelquefois descendans : d'où il a conclu que les Savans dont il s'agit ont été induits en erreur par de semblables Baromètres. Il s'est de plus assuré que les Baromètres purgés d'air par l'action du feu, montoient constamment par la chaleur et descendoient par le froid : marche régulière et connue.

129. *Scholie.* Je ferai, avant de passer plus avant, une remarque qui trouve sa place ici, et qui a de fréquentes applications dans la pratique. Elle a pour objet certains courans d'air, qui sont excités par la différence de chaleur dans l'atmosphère, et dont la nature et la cause s'expliquent comme il suit.

Supposons sur un même niveau $ABEF$ (*Fig.* 44), deux portions d'air $ABCD$, $EFGH$, dont la première soit plus chaude que la seconde. Imaginons deux tuyaux horizontaux mn, pq de communication; et supposons qu'au premier instant, dans le tuyau inférieur, la pression en m soit égale à la pression en n, ce qui peut avoir lieu, en supposant que la colonne mC, plus rare et moins pe-

sante spécifiquement que la colonne nH, est plus haute en compensation : il est clair que dans le tuyau supérieur, la pression en p est plus grande que la pression en q, puisque la colonne mp est plus légère que la colonne nq; donc il passe de l'air de $ABCD$ en $EFGH$, par le tuyau pq. Or cet air, ainsi introduit, augmente la masse d'air $EFGH$ et la pression en n; d'où résulte un second courant, contraire au premier, de l'air $EFGH$ en $ABCD$, par le tuyau inférieur nm. Il en seroit de même, si on supposoit au premier instant la pression en p égale à la pression en q; car alors la pression en n seroit plus grande que la pression en m; ce qui produiroit d'abord un courant de l'air $EFGH$ dans l'air $ABCD$, par le tuyau nm; et ensuite un courant de l'air $ABCD$ dans l'air $EFGH$, par le tuyau pq. On voit par-là que si deux chambres voisines, l'une chaude, l'autre froide, viennent à communiquer ensemble par une porte qu'on ouvre, il s'établit deux courans contraires, l'un inférieur, de la chambre froide dans la chambre chaude; l'autre supérieur, de la chambre chaude dans la chambre froide. De même, lorsqu'on allume du feu au foyer d'une cheminée, l'air contenu dans la chambre, et celui qui s'y introduit sans cesse par les vides de la porte ou des fentes, forment un courant inférieur dirigé vers la cheminée, et un courant supérieur qui est forcé de s'élever par le tuyau de la cheminée et emporte la fumée avec lui; à moins que le tuyau de la cheminée ne soit

trop large relativement à la chambre, ou que ce second courant ne rencontre des obstacles dans son chemin ou à sa sortie, auxquels cas la fumée se répand dans la chambre, etc.

Du Thermomètre.

130. De même que le Baromètre marque la *pesanteur* de l'air, par l'équilibre qui existe entre la pression de l'atmosphère sur la surface du mercure contenu dans la cuvette, et le poids de la colonne de mercure suspendue dans le tube : le Thermomètre marque la *température* de l'air, au moyen d'un corps expansif, qui se dilate par le chaud, et qui se condense par le froid.

Quoique les corps solides, principalement les métaux, éprouvent des variations dans leurs volumes, par les alternatives du chaud et du froid, ils ne sont pas propres à former des Thermomètres pour les usages ordinaires. On préfère, pour cela, les fluides, et dans cette classe ceux qui sont le plus susceptibles de dilatation et de condensation, comme l'esprit-de-vin, le mercure, l'huile de lin, l'air lui-même, etc. Une certaine quantité d'un pareil fluide étant introduite et puis enfermée dans un corps creux, composé d'une boule et d'un mince tuyau de verre, occupe, par l'action du chaud et du froid, un espace plus ou moins grand, et fait ainsi connoître les changemens de température de l'air environnant, ou de l'atmosphère : tel est le méchanisme général du Thermomètre. On attache

l'instrument à une planche graduée, qui indique, par ses divisions, la marche de la liqueur.

131. Le chaud et le froid étant des quantités relatives, les expansions ou les contractions de la liqueur thermométrique doivent être rapportées, s'il est possible, à des termes fixes, soit afin de pouvoir comparer le chaud et le froid d'un lieu avec ceux d'un autre, soit pour connoître la température relative de différens climats, soit pour être en état de faire partout un grand nombre d'expériences physiques et chymiques, qui demandent un degré fixe et déterminé de chaud ou de froid. Je ferai ici quelques remarques générales sur les Thermomètres aujourd'hui les plus connus et les plus usités, sans remonter aux plus anciens, qui étoient très-imparfaits. Voyez, concernant toute cette matière, les *essais* du docteur Martine, l'ouvrage déjà cité de M. de Luc, et plusieurs autres livres de physique expérimentale.

132. Les physiciens, après avoir cherché longtemps un terme fixe pour l'origine de la graduation thermométrique, et après en avoir proposé plusieurs sur l'exactitude desquels les opinions étoient partagées, ont enfin adopté, pour cette détermination, ou la chaleur de l'eau bouillante, ou la congelation de l'eau commune. Sur quoi néanmoins il faut encore faire quelques observations, afin de parvenir à régler les termes dont il s'agit en parité de circonstances. Car si cette parité n'existoit pas, les ther-

momètres pourroient bien indiquer, pour un même lieu, les changemens de chaud et de froid, mais ils ne seroient comparables entr'eux, d'un endroit à un autre, que par un heureux hazard sur lequel on ne doit pas compter; et par-là ils perdroient l'un de leurs plus psécieux avantages.

133. Malgré les progrès que Galilée, Toricelli, Pascal, Boyle, etc. avoient déjà fait faire à la physique, Amontons est le premier qui ait déterminé et soumis à des mesures fixes le degré d'intensité auquel la chaleur de l'eau bouillante peut s'élever, et les variations qui arrivent dans la force élastique de l'air, selon qu'il est plus ou moins échauffé : deux découvertes de la plus haute importance dans la physique, et dont Amontons fit dès-lors l'application à un nouveau Thermomètre. (*Mém. de l'Acad. année* 1699, pag. 112; et 1702, p. 161.)

134. Tout le monde voyoit que de l'eau ordinaire contenue dans un chaudron posé sur un feu ardent, s'échauffoit par degrés; mais on ignoroit, ou du moins on ne s'étoit pas encore demandé, d'une manière scientifique, si le progrès de la chaleur de l'eau bouillante avoit un terme fixe et déterminé. Amontons reconnut par l'expérience, que lorsque l'eau est une fois parvenue à l'état d'ébullition parfaite, sa chaleur demeure invariable, et n'augmente plus par une plus longue ébullition, ni par une plus grande activité du feu. Cette observation ayant été répétée par Halley, et par plusieurs

plusieurs autres physiciens, s'est trouvée conforme à la vérité, avec cette restriction ou addition néanmoins que la chaleur de l'eau bouillante n'est la *même* que pour une *même* pression de l'atmosphère, ou pour une *même* élévation du mercure dans le Baromètre; car à mesure que la pression de l'atmosphère est plus grande, l'eau s'échauffe plus difficilement, et parvient plus tard à l'ébullition complète; mais aussi elle a alors une plus grande chaleur, qu'elle conserve ensuite invariablement. Par où l'on voit qu'en faisant usage du Baromètre, en deux endroits, on peut toujours déterminer les rapports de chaleur de l'eau bouillante, pour ces deux endroits.

135. Les observations d'Amontons sur les changemens de la force élastique de l'air par la chaleur, ne parurent pas moins nouvelles, ni moins singulières. On savoit depuis plusieurs années que l'air se comprime suivant la proportion des poids dont il est chargé, et que par conséquent sa force élastique, qui fait équilibre à la force comprimante, est aussi proportionnelle aux mêmes poids; on savoit également que l'air atmosphérique ordinaire tend à recevoir, par une augmentation de chaleur, une augmentation de volume; qu'en conséquence il se répand actuellement en un plus grand espace, s'il en a la liberté, mais que si au contraire il est resserré et forcé de conserver son même volume, il acquiert une augmentation de force élastique. Restoit à déterminer cette augmentation d'une

manière exacte et conforme à la première loi, démontrée par les expériences de Mariotte. Amontons, dont l'objet n'étoit d'abord que la construction de son ingénieux *moulin à feu* (*Mém. de* 1699), n'avoit eu besoin, pour cela, que de connoître l'augmentation de force du ressort de l'air ordinaire, par la chaleur de l'eau bouillante; et il avoit trouvé que cette augmentation étoit environ le tiers de la force du ressort de l'air près la surface de la terre où ce fluide porte le poids de l'atmosphère; c'est-à-dire un poids égal à celui d'une colonne de mercure d'environ 28 pouces de hauteur, de sorte que l'augmentation dont il s'agit étoit exprimée par le poids d'une colonne de mercure de près de 10 pouces de hauteur. Mais, en poussant plus loin ses recherches, Amontons vit et s'assura par l'expérience que l'augmentation de la force élastique de l'air, produite par la chaleur de l'eau bouillante, n'est pas bornée à ne soutenir que 10 pouces de mercure de plus que la charge de l'atmosphère; qu'elle en peut soutenir plus ou moins, à proportion des poids dont l'air est chargé; que le poids du mercure soutenu est *environ le tiers* de la charge totale de l'air, quand cet air est d'abord dans l'état *tempéré; moins que le tiers*, quand l'air est dans un état plus chaud que le tempéré; enfin, *plus que le tiers*, quand l'air est dans un état plus froid que le tempéré. Par exemple, si, lorsque l'air est dans un état tempéré, une masse d'air chargée par trente pouces de mercure, en y comprenant le poids de

l'atmosphère, reçoit par la chaleur de l'eau bouillante une augmentation de ressort de 10 pouces de mercure; lorsque cette masse viendra à être chargée, en tout, de 60 pouces de mercure, elle recevra, par la même chaleur, une augmentation de ressort de 20 pouces; quand elle sera chargée en tout, de 90 pouces de mercure, elle recevra, toujours par la même chaleur, une augmentation de 30 pouces de mercure; et ainsi des autres. De-là Amontons conclut en général qu'un même degré de chaleur, quelque petit qu'on veuille le supposer, peut produire dans une masse d'air des augmentations de force élastique, qui iront continuellement en augmentant à mesure qu'on augmentera les charges de cette masse d'air; et que les augmentations de force élastique suivront la proportion des poids comprimans.

D'un autre côté, il résulte de la règle de Mariotte, que deux masses inégales d'air auront néanmoins des forces élastiques égales, sous le même degré de température; car la température des deux masses étant la même, les volumes ou les espaces qu'elles occupent sont proportionnels à ces mêmes masses; donc les densités (quotients des masses ou des poids divisés par les volumes) sont égales. Or, en vertu de la règle de Mariotte, les forces comprimantes de deux volumes quelconques d'air dans un même endroit sont proportionnelles aux densités. Donc ici les forces comprimantes, de même que les forces élastiques qui leur font équilibre, sont égales. Nos

deux masses inégales d'air soutiendront donc, sous le même degré de chaleur, des colonnes de mercure de même hauteur.

Par une conséquence ultérieure de tout ce que nous venons de dire, Amontons infère qu'une très-petite masse d'air peut acquérir, par un très-petit degré de chaleur donné, une force élastique, qui augmentera de plus en plus à mesure qu'on chargera cette masse de plus grands poids.

136. D'après ces données, il propose un Thermomètre, dont tel est le principe général. Une quantité d'air pris à une température moyenne, au printems ou en automne, remplit la capacité d'une boule de verre, qui n'a d'ouverture qu'au fond, par où elle communique avec la petite branche d'un mince tube de verre, qui s'y adapte exactement, et qui, après s'être un peu recourbé en cet endroit, s'élève ensuite verticalement à la hauteur d'environ 48 pouces. Ce tube, ouvert par le haut, contient une colonne de mercure qui agit par en bas contre le ressort de l'air enfermé dans la boule. Cela posé, lorsque la boule, par son contact avec l'air extérieur, vient à s'échauffer ou à se refroidir, la force élastique de l'air intérieur augmente ou diminue; la colonne de mercure se balance dans le tube, et marque par ses excursions les changemens de température de l'atmosphère. La graduation commence au point où répond la surface supérieure de la colonne de mercure, par la chaleur de l'eau bouillante. Une partie du mercure entre dans la boule,

par le froid qui comprime l'air intérieur, ou en sort par le chaud qui dilate ce même air.

Il n'y a de difficulté dans la construction de ce Thermomètre, que celle d'introduire et d'enfermer la quantité d'air qui doit occuper la capacité de la boule. Le procédé que l'auteur met en œuvre pour cela, est très-ingénieux, et on en peut voir le détail dans son mémoire même (an 1702).

Une condition essentielle pour que deux Thermomètres ainsi conduits puissent être comparables entr'eux, est que la capacité du tube où le mercure fait ses mouvemens doit être très-petite, et comme nulle en comparaison de la capacité de la boule; autrement l'espace occupé par l'air intérieur viendroit à changer sensiblement; ce qui produiroit des variations sensibles dans la force élastique, et conséquemment aussi des *anomalies* sensibles dans les excursions de la colonne de mercure.

137. Quoique tous les Physiciens se soient accordés à donner au Thermomètre d'Amontons les justes louanges qu'il mérite, cet instrument a été peu mis en pratique, parce que 1°. il est compliqué, difficile et long à construire exactement, embarassant par son volume. 2°. Il est réglé sur la température moyenne pour le climat de Paris, ce qui est un peu vague, et peut ne pas convenir aux autres climats. 3°. De nouvelles expériences ont appris que la force élastique de l'air, dans tous les états, ne suit pas assez exactement les rapports assignés par Amontons. 4°. Le mercure de la colonne thermométrique est

sujet lui-même à des variations sensibles de volume par le chaud et par le froid, lesquelles venant à se combiner avec les variations d'élasticité de l'air intérieur, produisent des résultats incertains ou inconnus, et par conséquent inappréciables.

138. On trouve dans les *Transactions philosophiques, an* 1701, un mémoire de Newton, intitulé : *Scala graduum caloris et frigoris.* L'auteur s'est proposé de déterminer non-seulement les degrés de chaud que le Thermomètre peut supporter sans se casser, mais encore des chaleurs fort supérieures, en faisant servir à ce double objet un Thermomètre à huile de lin, et la chaleur d'un fer rouge. Voici une idée générale et suffisante de sa méthode.

Il prend pour l'origine, ou le terme zéro du Thermomètre, l'état de l'air où l'eau ordinaire commence à se glacer. Il suppose d'abord, pour former son *échelle* des chaleurs, deux progressions, l'une arithmétique, l'autre géométrique, qui se correspondent, et formées de telle manière, que 1 et 12 étant deux termes analogues dans ces deux progressions, les autres paires de termes analogues sont 2 et 24, 3 et 48, 4 et 96, etc. Ensuite, entre tous les termes consécutifs de ces deux progressions, il insère trois moyens proportionnels ; ce qui donne deux nouvelles progressions d'un plus grand nombre de termes, et par conséquent le moyen de comparer un plus grand nombre de chaleurs. Les termes de la progression arithmétique marquent la graduation du Thermomètre ; ceux de la progression géométrique

servent à exprimer les rapports de chaleurs des objets comparés. Newton fait répondre la chaleur du corps humain au degré 1 du Thermomètre, ou au degré 1 de la progression arithmétique, et par conséquent au degré 12 de la progression géométrique. Par-là, il trouve que la chaleur d'un bain où l'on peut plonger la main sans se brûler répond au terme $1 \frac{1}{4}$ de la progression arithmétique, et au terme $14 \frac{3}{11}$ de la progression géométrique; que la chaleur d'un bain très-chaud répond au terme $1 \frac{1}{2}$ de la progression arithmétique, et au terme 17 de la progression géométrique; que la chaleur où un morceau de cire flottant sur un bain chaud commence à se fondre, répond au terme 2 de la progression arithmétique, et au terme 24 de la progression géométrique; que la chaleur de l'eau bouillante répond au terme $2 \frac{1}{2}$ de la progression arithmétique, et au terme 34 de la progression géométrique; ainsi de plusieurs autres substances, depuis la glace jusqu'à l'étain fondu.

Pour déterminer les grandes chaleurs que le Thermomètre ne peut donner immédiatement, Newton fait rougir au feu un morceau de fer; il le laisse ensuite refroidir en plein air; il observe le temps du refroidissement jusqu'au moment où la chaleur devient simplement égale à celle du corps humain, chaleur que le Thermomètre fait connoître; il suppose que la chaleur perdue par le fer en un temps donné est comme la chaleur totale du fer : d'où il suit qu'en prenant les temps des refroidissemens

successifs en progression arithmétique, les chaleurs correspondantes sont en progression géométrique, et que par conséquent elles se trouvent facilement par les logarithmes. On voit, en effet, que ce problème est de même nature que celui de l'article 107. De plus, en représentant la suite des temps par la graduation arithmétique du Thermomètre, dans laquelle le terme 1 correspond au terme 12 commun à l'échelle géométrique du Thermomètre, et à la progression géométrique des chaleurs du fer, il est clair que l'on connoitra sur l'échelle arithmétique du Thermomètre les différens points ou degrés auxquels répondent successivement les chaleurs du fer, qui auront aussi un rapport connu avec la chaleur du corps humain, ou avec les autres chaleurs marquées par le Thermomètre. Newton trouve qu'au degré 5 de cette échelle répond une chaleur 195, qui est celle d'un brâsier de charbon de terre, et par conséquent aussi du fer qu'on y fait chauffer jusqu'à incandescence. Ainsi, suivant son calcul, une telle chaleur est environ $16\frac{1}{4}$ plus grande que celle du corps humain, et $5\frac{25}{51}$ plus grande que celle de l'eau bouillante.

Il détermine semblablement la chaleur qui fait fondre plusieurs métaux, ou ce qui revient au même, la chaleur par laquelle ces métaux, fondus d'abord, commencent ensuite à se durcir, en posant sur un fer rougi au feu, un morceau de métal fondu, et observant le temps du refroidissement, jusqu'à ce que ce métal commence à se durcir, et que la cha-

leur du fer devienne égale à celle du corps humain. Toute cette théorie est très-ingénieuse; mais on a reconnu que l'hypothèse de Newton sur la diminution de la chaleur des métaux s'écartoit sensiblement de la vérité, et on a cherché d'autres moyens pour arriver au but. Cette discussion est étrangère à mon sujet.

139. Dès l'année 1680, Halley avoit proposé d'employer pour liqueur thermométrique le mercure qui n'a pas l'inconvénient de se déteriorer par le laps du temps, du moins à beaucoup près autant que l'esprit-de-vin, ni de s'attacher aux parois du tube comme les huiles. En 1709, Farenheit mit entre les mains des Physiciens un Thermomètre à mercure, qui s'est perfectionné dans la suite, et qui est aujourd'hui très-répandu. Dans ce Thermomètre, l'origine, ou le zéro de la graduation, répond à une forte congélation artificielle, produite par un mélange de sel et de nitre; depuis ce terme, il y a 32 degrés jusqu'à l'état de glace ordinaire; 212 degrés jusques à la chaleur de l'eau bouillante, etc.

140. De tous les Thermomètres, aucun n'a eu autant de célébrité et de vogue, du moins en France, que celui de Réaumur (*Mém. de l'Acad. an.* 1730 *et* 1731). L'auteur prend pour origine de sa graduation la congélation de l'eau, non la congélation naturelle qui n'a pas constamment lieu au même degré de froid, mais une congélation artificielle faite avec de la glace ordinaire et des sels. Pour éviter l'erreur

qui pourroit résulter de la glace naturelle plus ou moins froide qu'on emploie dans cette opération, il fait sa congélation dans un temps où l'air n'a aucune disposition à geler l'eau, et il fixe le degré zéro au moment où la première surface de l'eau commence à se geler artificiellement; ce qui répond au degré 32 de Farenheit, à très-peu de chose près. Réaumur emploie, pour liqueur, de l'esprit-de-vin rectifié; il suppose ou conclut que la totalité de la liqueur étant censée divisée en 1000 parties, elle se dilate de 80 ou 84 parties, par la chaleur de l'eau bouillante qu'il fixe en conséquence à ce degré. Cette détermination n'est pas bien précise, comme on voit. D'ailleurs, il faut considérer que l'esprit-de-vin bouillonne avant l'eau. Or, il est très-possible que ce bouillonnement une fois établi n'augmente plus, et donne moins de chaleur que l'eau bouillante, à-peu-près comme il arrive à l'eau bouillante elle-même, dont la chaleur a un terme, et n'augmente plus par l'action continuée du feu auquel l'eau est exposée. Les premiers Thermomètres de Réaumur avoient un autre défaut particulier. Ils étoient construits sur de grandes dimensions; d'où il arrivoit que la température de l'air avoit de la peine à les pénétrer, et qu'en les comparant avec d'autres plus petits, on remarquoit que la liqueur montoit encore dans les uns, tandis qu'elle descendoit dans les autres. On reconnut donc bientôt que les petits Thermomètres étoient préférables. Dans la suite, plusieurs Physiciens, en conservant la graduation de Réaumur,

ont substitué avec avantage le mercure à l'esprit-de-vin.

Chaque degré de l'échelle de Réaumur vaut pres-presque deux degrés de l'échelle de Farenheit.

141. Un autre Thermomètre, à-peu-près de la même année 1730, celui de Delisle, a été aussi fort employé. Il est fait avec du mercure. La graduation commence à la chaleur de l'eau bouillante, et les chiffres qui la marquent, soit au-dessus, soit au-dessous, vont en augmentant. Delisle suppose que le volume du mercure, le Thermomètre étant plongé dans l'eau bouillante, est de 10 mille ou 100 mille parties, et il exprime en de telles parties, au-dessus et au-dessous du terme zéro, tous les degrés de chaleur correspondans à tous les degrés de dilatation et de condensation. L'exactitude de ce Thermomètre dépend du seul terme de l'eau bouillante, qu'il est par conséquent important de bien déterminer, en le subordonnant à une hauteur donnée du mercure dans le Baromètre.

142. *Scholie I.* Tous ces Thermomètres et plusieurs autres que je passe sous silence ont leurs avantages et leurs inconvéniens. Voyez l'ouvrage de M. de Luc.

On s'accorde assez généralement aujourd'hui à regarder le mercure comme la meilleure liqueur thermométrique. Cependant, par des expériences faites à Pétersbourg, en 1785, par M. Guthrie, de la société royale de Londres, il peut se trouver

des cas où les Thermomètres à esprit-de-vin devroient être employés de préférence aux Thermomètres à mercure. Entrons dans quelques détails.

En 1759, les docteurs Braun et Æpinus parvinrent à geler le mercure, à Pétersbourg, par un froid artificiel qui répondoit au degré 32 de Réaumur, au-dessous de la glace. M. Guthrie a fait les mêmes expériences, et plusieurs autres; d'où il a tiré les conclusions suivantes.

1°. Le point de froid absolu pour la congélation du mercure est à 32 degrés au-dessous de zéro selon l'échelle de Réaumur.

2°. Le mercure ordinaire, et même celui qui est surchargé de parties métalliques étrangères, ne se gèle pas à un degré de froid moindre, que le mercure revifié le plus pur et celui qui a été traité avec l'alcali; mais le mercure purifié par l'antimoine se fige à deux degrés de moins.

3°. Par de certaines circonstances le mercure du Thermomètre peut être refroidi à quelques degrés au-dessous de son vrai point de congélation, sans qu'il se gèle, tandis que le mercure dans lequel il est plongé se trouve parfaitement glacé.

4°. Le Thermomètre à mercure est une mesure juste de la chaleur et du froid, depuis le degré de l'eau bouillante jusqu'au point de la congélation du mercure; mais au-dessous de ce point la contraction de cette substance métallique rend sa marche irrégulière et trompeuse.

D'après ces bases, M. Guthrie regarde comme

illusoires et fautives des observations par lesquelles on avoit cru trouver en Sibérie, avec le Thermomètre à mercure, des froids beaucoup plus grands que ceux de la congélation du mercure; il pense qu'on peut y avoir été trompé par la contraction du mercure, et que les Thermomètre à esprit-de-vin sont plus propres à faire connoître les froids extrêmes, l'esprit-de-vin étant susceptible d'une très-grande contraction, sans qu'il en résulte d'irrégularité dans sa marche.

143. *Scholie II.* Il y a un défaut radical et commun à tous les Thermomètres. Le verre est sujet aux variations du chaud et du froid; il se dilate et se condense différemment à proportion de son épaisseur; ce qui trouble la marche naturelle de la liqueur thermométrique. De plus, il peut se faire que les degrés d'expansion de cette liqueur n'expriment pas exactement ceux de la chaleur; il est très-possible qu'à mesure que la chaleur croît également, elle trouve plus ou moins de difficulté à dilater la même liqueur. Enfin, il me paroît que pour rendre deux Thermomètres comparables ensemble avec toute la précision que le sujet peut comporter, il faudroit que ces deux instrumens eussent, du moins à-peu-près, mêmes figures, mêmes dimensions, même espèce et même quantité de liqueur.

On lit (*Mém. de l'Acad. an.* 1787) d'excellentes recherches *sur les moyens d'établir entre les Thermomètres une comparabilité plus approchée*, etc.,

par feu M. Charles, homme d'un talent rare, qui, au milieu des plus cruelles infirmités, avoit acquis un profond savoir en plusieurs genres, et qui fut enlevé, le 20 août 1791, dans la trente-huitième année de son âge, à la haute géométrie, dont il reculoit les limites.

Usage du Thermomètre pour rectifier les hauteurs des montagnes, déterminées par le Baromètre.

144. Le chaud et le froid qui font monter et descendre la liqueur dans le Thermomètre, produisent aussi, comme nous l'avons déjà dit, des variations dans les hauteurs de la colonne de mercure du Baromètre; et il peut arriver que ces variations aient un rapport sensible avec la hauteur de la colonne barométrique. Alors le Baromètre fait, du moins en partie, la fonction de Thermomètre; et on ne doit pas être surpris qu'il se trouve des erreurs dans les déterminations des hauteurs, fondées sur la seule considération que la colonne barométrique ne monte ou ne descend qu'en vertu de la pression plus ou moins grande de l'atmosphère. Aussitôt que les Géomètres-Physiciens eurent fait cette remarque, ils cherchèrent à traiter la question, en ayant égard à l'action du chaud et du froid sur le Baromètre. Ils donnèrent, pour cela, de nouvelles formules plus ou moins simples, plus ou moins conformes avec les mesures géométriques. Mais comme quelques-unes de ces mesures manquoient elles-mêmes d'exactitude : ce défaut qu'on ignoroit alors et qu'on

a reconnu depuis, fut cause que des formules propres à représenter certaines observations, en contredisoient d'autres; ce qui a retardé les progrès de cette branche de l'Hydrostatique-Physique. Enfin on a fait, dans ces derniers temps, de nouvelles et de nombreuses expériences sur cette matière; et on a tâché de satisfaire aux observations, en appliquant un terme de correction à la formule $x = \frac{H\delta}{Dm}$ $(L.H - L.h)$ que nous avons donnée (107).

145. M. de Luc, qui s'est fort occupé de cet objet, trouve, par les observations qu'il a faites sur les montagnes des environs de Genève, et dans ses voyages, que la formule précédente donne les hauteurs des lieux avec exactitude, et n'a par conséquent besoin d'aucune correction, lorsque le mercure, dans le Thermomètre de Réaumur, se tient à $16\frac{3}{4}$ degrés au-dessus de la glace. Tel est donc le point d'où il part pour corriger la formule relativement à d'autres degrés de chaleur. La règle qu'il donne en conséquence pour déterminer la différence de niveau de deux lieux A et B, revient à celle-ci: observez en A et B les degrés du Thermomètre; prenez les deux différences de ces degrés à $16\frac{3}{4}$ degrés, en ayant égard aux signes; ajoutez-les ensemble; prenez la moitié de la somme, ce qui vous donnera un nombre absolu que je nomme $\pm n$. Alors, x étant la différence de niveau, donnée par la formule non corrigée $x = \frac{H\delta}{Dm}(L.H - L.h)$,

y la véritable différence de niveau qu'on cherche ; on aura, selon M. de Luc, $y = x \pm \frac{x \cdot n}{215}$.

146. En 1781, M. Trembley, qui s'est annoncé de très-bonne heure pour un grand Géomètre, envoya à l'Académie des Sciences un Mémoire, imprimé depuis, dans lequel il prouve, d'après un grand nombre d'observations faites avec toute l'exactitude possible aux environs de Genève, par M. le Chevalier de Schuckburgh, et en Angleterre par M. le Colonel le Roi, que la méthode de M. de Luc donne les différences de niveau avec moins d'exactitude que ne les donne la méthode simple ou la formule $x = \frac{Hf}{Dm}(L.H - L.h)$; d'où il conclut que M. de Luc a mal fixé le degré moyen du Thermomètre. Il fait voir, par la combinaison des observations dont il s'agit, que le degré moyen du Thermomètre est $11\frac{1}{2}$, et que le diviseur de $\pm n$, au lieu d'être 215, doit être 192. Substituant donc, dans la formule de M. de Luc, $11\frac{1}{2}$ à $16\frac{3}{4}$, et 192 à 215, il obtient, $y = x \pm \frac{n \cdot x}{192}$; formule qui représente, à peu de chose près, les observations de M. le Chevalier de Schuckburgh, et de M. le Colonel le Roi. Mais, comme M. Trembley l'observe lui-même, toute cette matière a besoin d'être soumise encore à de nouvelles expériences. Elles sont d'autant plus nécessaires, qu'indépendamment de la chaleur, la différence des vents, celle de sécheresse ou

ou d'humidité de l'air, etc. peuvent aussi produire quelques variations dans les hauteurs du Baromètre en deux endroits : effets à constater et à introduire dans le calcul.

M. de Luc, qui a proposé quelques objections assez foibles contre la théorie de Bouguer sur les dilatations et les condensations de l'air, auroit rendu sans doute un plus grand service aux Sciences, en approfondissant davantage cette théorie, et en faisant de nouvelles expériences avec le Pendule, qu'il auroit fallu ensuite combiner avec celles du Baromètre et du Thermomètre.

147. *Scholie général.* On trouvera peut-être que je me suis un peu trop étendu sur la Physique du Baromètre et du Thermomètre; mais elle appartient réellement à l'Hydrostatique; et vu son importance et son utilité, je ne pouvois guère lui donner moins de place. Je ne parle point de la sécheresse et de l'humidité de l'air, ni de la relation que ces deux qualités ont avec la chaleur, ni des instrumens qu'on emploie pour les mesurer, parce que toutes ces questions, d'ailleurs très-intéressantes et d'une longue discussion, se rapportent à la Physique proprement dite. Voyez à ce sujet le bel ouvrage de M. de Saussure, que j'ai déjà cité.

CHAPITRE XI.

Principes généraux de l'équilibre des corps flottans sur un fluide.

148. LA surface d'un corps solide plongé dans un fluide, est pressée perpendiculairement en tous ses points par le fluide adjacent, de la même manière et par les mêmes raisons que le fond et les parois d'un vase sont pressés par la liqueur qu'il contient. De toutes ces pressions résulte une force qui tend à soulever le corps, et qui ne peut être détruite que par la pesanteur même de ce corps, ou par la pesanteur combinée avec une force extérieure. Cherchons donc d'abord la quantité et la direction de la résultante de toutes les pressions du fluide, afin de pouvoir connoître la force qu'il lui faut opposer pour établir l'équilibre. Nous aurons besoin, pour cela, des principes de Mécanique qui ont été démontrés dans les articles 9, 10, 11, 12, 13, 14.

149. Théorème I. *Un corps solide* A (Fig. 45), *plongé dans un fluide, est soulevé verticalement par ce fluide, avec une force dont la quantité a pour mesure le poids du fluide déplacé, et dont la direction passe par le centre de gravité de ce même fluide déplacé, ou, ce qui revient au même,*

par le centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide et considérée comme homogène.

Soit MN la surface du fluide; imaginons que la partie MON du corps qui y est plongé soit partagée en une infinité de tranches par des plans horizontaux Ss, Rr; et qu'ensuite la ceinture qui enveloppe chaque tranche et qui en forme la surface convexe, soit partagée en une infinité de trapèzes. Soit G le centre de gravité de l'un quelconque X de ces trapèzes latéraux; par le point G, menons la verticale Gg, et la perpendiculaire PG à la surface du trapèze, et supposons que le plan $MSRN$ passe par ces deux lignes. Il est évident que SR est la hauteur du trapèze, et qu'en menant les verticales SL, RK, la petite droite LK sera la hauteur du trapèze de projection orthogonale sur la surface du fluide; de sorte que si l'on nomme B la largeur moyenne du trapèze X, laquelle est aussi celle du trapèze de projection, la surface du trapèze $X = B \times SR$, et la surface du trapèze de projection $= B \times LK$. De plus, la surface du rectangle dont la base $= B$, et la hauteur est Ry, distance des deux plans horizontaux Ss, Rr, aura pour valeur $B \times Ry$.

Maintenant, chacun des trapèzes qui composent la surface convexe d'une tranche, pouvant être considéré comme une partie des parois d'un vase, on voit (26) que le trapèze X est pressé perpendiculairement, ou suivant la direction PG, avec une force P, qui a pour valeur $B \times SR \times Gg$.

Décomposons cette force en deux autres, situées dans le plan $MSRN$, l'une V verticale, l'autre H horizontale. La hauteur Gg étant la même pour tous les trapèzes latéraux d'une même tranche, la force P, dont la valeur absolue est $B \times SR \times Gg$, peut être supposée proportionnelle à $B \times SR$, pour tous ces trapèzes; et alors (12) la force V sera proportionnelle à $B \times LK$, et la force H sera proportionnelle à $B \times Ry$. Or (14), toutes les forces H, correspondantes à tous les rectangles $B \times Ry$, pour une même tranche, se font équilibre. Par conséquent il ne reste que les forces V: et comme la valeur absolue de la force P est $B \times SR \times Gg$, la valeur absolue de la force V sera $B \times LK \times Gg$, expression qui est celle du petit solide composé de filets verticaux compris entre le trapèze X et sa projection; puisque suivant le Théorème du P. Guldin, un tel solide peut être considéré comme engendré par tous les points du trapèze de projection, qui se seroient mus verticalement jusqu'à la surface X. Ainsi chaque trapèze latéral est poussé verticalement, avec une force qui est égale au petit solide correspondant, et qui de plus passe évidemment par le centre de gravité de ce solide. Or le fluide déplacé par le corps A n'est autre chose que la somme ou la différence de tous ces petits solides. Donc la somme ou la résultante de toutes les forces qui tendent à soulever verticalement le corps A, est égale au poids du fluide déplacé, et passe par le centre de gravité de ce fluide, ou par celui de la

partie *MON* du corps, plongée dans le fluide et considérée comme homogène.

150. *Corollaire I.* Si un corps abandonné à l'action de la pesanteur et flottant sur un fluide, est dans une immobilité absolue, ces deux conditions ont toujours lieu tout-à-la-fois. 1°. Le poids du corps est égal au poids du fluide déplacé; 2°. le centre de gravité du corps et celui de la partie enfoncée dans le fluide, considérée comme homogène, sont placés dans une même ligne verticale. Car pour l'équilibre, il faut 1°. que le poids du corps soit égal à l'effort du fluide qui tend à le soulever verticalement; 2°. il faut que ces deux forces soient directement opposées.

Quand ces deux conditions n'ont pas lieu tout-à-la-fois, le corps oscille et ne parvient à l'équilibre que lorsque la résistance de l'eau et de l'air, ou d'autres causes, ayant anéanti tous ses mouvemens, il trouve enfin et conserve une situation telle que son poids et la poussée verticale du fluide se détruisent mutuellement. On voit par-là que si l'on veut qu'un vaisseau flottant sur la mer, enfonce dans l'eau une partie *déterminée* de son volume, il faut tellement proportionner et distribuer la charge, qu'en ajoutant son poids à celui de la coque même du vaisseau, la somme soit égale au poids de l'eau qui doit être déplacée; et que de plus les centres de gravité de ces deux poids soient situés dans une même ligne verticale.

151. *Corollaire II.* Le corps étant toujours soumis à l'action de sa pesanteur et de la poussée verticale du fluide, et ces deux forces étant supposées égales et directement contraires; si l'on nomme M le volume total de ce corps; N, celui de sa partie enfoncée dans le fluide et considérée comme homogène; p, sa pesanteur spécifique; ϖ, la pesanteur spécifique du fluide : l'état d'équilibre sera représenté par l'équation $p \cdot \times M = \varpi \times N$, en se souvenant que le poids absolu d'un corps (*Notions générales*, *art. V*), est le produit de la pesanteur spécifique par le volume. Or, cette équation fait voir, 1°. que si $\varpi = p$, on aura $N = M$; c'est-à-dire, que si le corps flottant et le fluide ont la même pesanteur spécifique, le corps s'enfoncera entièrement dans le fluide, et s'y tiendra d'ailleurs indifféremment à telle profondeur qu'on voudra. 2°. Si on a $p < \varpi$, on aura $N < M$; c'est-à-dire, que si le corps flottant a une pesanteur spécifique moindre que celle du fluide, il ne s'y enfoncera qu'en partie. 3°. Comme la plus grande valeur que N puisse avoir est M, si on a $p > \varpi$, on aura $p \times M > \varpi \times N$; donc alors le corps A tombera au fond du vase, et tendra à descendre ou pressera le fond du vase avec une force $= p \times M - \varpi \times N = (p - \varpi) \times M$, à cause qu'ici N devient M.

On voit par-là pourquoi on a plus de peine à soutenir un poids hors de l'eau, que lorsqu'il est plongé dans l'eau : dans le premier cas on soutient tout le poids du corps; dans le second, on soutient

seulement l'excès du poids du corps sur le poids de l'eau dont il occupe la place.

152. *Corollaire III.* Supposons que le corps surnage librement, ou que sa pesanteur spécifique soit moindre que celle du fluide. De l'équation $p \times M = \varpi \times N$, on tire la proportion $p : \varpi :: N : M$, c'est-à-dire, que *la pesanteur spécifique du corps est à celle du fluide, comme le volume de la partie du corps plongée dans le fluide, est au volume total du même corps.* Connoissant trois termes quelconques de cette proportion, on déterminera celui qui est inconnu.

153. *Corollaire IV.* Si l'on augmente ou si l'on diminue le volume N que le corps flottant enfonce dans le fluide, d'une quantité n, il faudra, pour maintenir l'équilibre, augmenter ou diminuer le poids absolu $p \times M$ du même corps, d'un poids q tel que l'on ait $p \times M \pm q = \varpi \times N \pm \varpi \times n$, ou bien $q = \varpi \times n$. Le poids additionnel ou soustractif q, est donc toujours égal au poids du fluide que le corps déplace de plus ou de moins que dans son premier état.

On déterminera par-là les changemens qui arrivent à la flottaison d'un Vaisseau, lorsqu'on fait quelque changement à sa charge ou au volume qu'il enfonce dans la mer.

154. *Remarque.* Cette tendance que les fluides ont à soulever les corps flottans, est employée tous les jours avec succès à tirer des fardeaux très-pesans

du fond d'une rivière ou de la mer. On prend pour cela un bateau d'un grand volume, qu'on fait enfoncer profondément en le chargeant de poids très-pesans; en cet état, on l'attache solidement au fardeau qu'on veut élever. Ensuite on ôte, en partie ou en totalité, les poids qui l'avoient fait enfoncer; et alors il s'élève en vertu de la poussée verticale du fluide, et fait monter le fardeau auquel il est attaché, avec une force qui, au premier instant, est égale à la somme des poids dont on l'a déchargé.

155. Théorème II. *Si l'on plonge dans un fluide un corps solide plus pesant spécifiquement que lui, ce corps y perdra une partie de son poids, telle qu'on aura cette proportion : le poids absolu du corps est à la perte de poids qu'il fait dans le fluide, comme la pesanteur spécifique du corps est à la pesanteur spécifique du fluide.*

Car puisque le corps est plus pesant spécifiquement que le fluide, il s'y enfoncera entièrement (151), et tendra à descendre avec une force $= M \times (p - \varpi)$.

Or, pour soutenir cette force, supposons que le corps soit placé dans l'un des bassins d'une balance (que par cette raison on appelle *balance hydrostatique*), lequel bassin est plongé dans le fluide, tandis que l'autre, suspendu en l'air, est chargé du contre-poids convenable; ou, ce qui revient au même, imaginons que la force dont il s'agit soit détruite par une force Q égale et directement opposée. On aura $Q = M(p - \varpi)$; ou $pM - Q = M\varpi$; ou $p \times (pM - Q) = p \times M\varpi$; d'où l'on

tire $pM : pM - Q :: p : \varpi$; ce qui est la proportion du Théorème.

156. *Corollaire.* On voit par-là que connoissant le poids absolu d'un corps solide qui s'enfonce entièrement dans un fluide, ou qui a plus de pesanteur spécifique que ce fluide, et la perte de poids que fait le corps étant plongé dans le fluide : on connoîtra la pesanteur spécifique du fluide, lorsque celle du corps sera donnée ; ou bien réciproquement la pesanteur spécifique du corps, lorsque celle du fluide sera donnée.

157. Théorème III. *Si on plonge dans deux fluides différens un même corps solide plus pesant spécifiquement que chacun d'eux : les pesanteurs spécifiques des deux fluides seront entr'elles comme les pertes de poids que le corps y fait.*

Car soient toujours M le volume du corps proposé; p sa pesanteur spécifique; ϖ et ϖ' les pesanteurs spécifiques des deux fluides; Q et Q' les deux contre-poids du corps, c'est-à-dire, les forces qu'il faut employer pour l'empêcher de descendre dans les deux fluides : on aura les deux équations $Q = M(p - \varpi)$, $Q' = M(p - \varpi')$. La première donne $M = \frac{pM - Q}{\varpi}$; et la seconde, $M = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$. Donc $\frac{pM - Q}{\varpi} = \frac{pM - Q'}{\varpi'}$, ou bien $(pM - Q)\varpi' = (pM - Q')\varpi$; d'où l'on tire $\varpi : \varpi' :: pM - Q : pM - Q'$; ce qui est la proportion du Théorème.

158. *Corollaire.* Connoissant les pertes de poids que fait un même corps plongé successivement dans deux fluides, et la pesanteur spécifique de l'un des fluides, on connoitra la pesanteur spécifique de l'autre.

159. Théorème IV. *Si on plonge dans un même fluide deux corps chacun plus pesans spécifiquement que lui, et que ces corps perdent des parties égales de leurs poids : ils auront des volumes égaux.*

Car soient M et M' les volumes des deux corps; p et p' leurs pesanteurs spécifiques; Q et Q' leurs contre-poids; ϖ la pesanteur spécifique du fluide : on aura les équations $Q = pM - \varpi M$, $Q' = p'M' - \varpi M'$. Donc si l'on suppose que les deux corps perdent des parties égales de leurs poids, dans le fluide, ou qu'on ait $pM - Q = p'M' - Q'$, on aura aussi $\varpi M = \varpi M'$, ou $M = M'$; c'est-à-dire, que les volumes des deux corps seront égaux.

160. *Corollaire.* De-là suit la manière de résoudre le problème de la couronne de Hieron, Roi de Syracuse. Voici en quoi consistoit ce problème.

Hieron ayant fait faire une couronne qui, selon ses conventions avec l'orfèvre, devoit être d'or pur, et soupçonnant qu'on y avoit mêlé de l'argent, voulut savoir d'Archimède la manière d'éclaircir ce soupçon, sans endommager la couronne. On ne connoit pas bien exactement les moyens qu'Archimède employa pour cela; mais il y a toute apparence qu'il s'y prit ainsi.

Puisque les corps qui perdent des parties égales de leurs poids dans un même fluide ont des volumes égaux, il est clair que si l'on prend un lingot d'or, tel que l'excès de son poids dans l'air ou dans le vide sur son poids dans l'eau, soit égal à l'excès du poids de la couronne dans le vide sur son poids dans l'eau, ce lingot et la couronne auront des volumes égaux. On déterminera de la même manière un lingot d'argent de même volume que la couronne.

Cela posé, si l'on a trouvé que dans l'air la couronne pèse moins que le lingot d'or et plus que le lingot d'argent, et si l'on est assuré d'ailleurs qu'elle ne contient que de l'or et de l'argent, on conclura qu'elle n'est ni d'or, ni d'argent purs, mais un composé de ces deux métaux; et on trouvera, en général, ce qui y entre de chacun d'eux, par le calcul suivant. Soient A et B les poids des deux corps composans; M, le poids du corps mixte; G, le volume commun aux trois corps; u et z, les parties des poids A et B qu'il faut prendre pour former M. On aura d'abord, $u+z=M$. D'un autre côté, le volume de u est $\frac{Gu}{A}$, comme étant une quatrième proportionnelle aux trois quantités A, u, G; et de même le volume de z est $\frac{Gz}{B}$. Or la somme de ces deux volumes est G; ce qui donne cette seconde équation $\frac{Gu}{A}+\frac{Gz}{B}=G$, ou $Bu+Az=AB$. Donc $u=\frac{A(M-B)}{A-B}$, $z=\frac{B(A-M)}{A-B}$.

Cette méthode seroit insuffisante, si l'espèce des métaux étoit inconnue, si on ne savoit pas, par exemple dans le problême précédent, que la couronne ne contient que de l'or et de l'argent; car il est clair qu'on peut faire avec de l'or et un autre métal, tel que du cuivre, un mixte de même poids et de même volume qu'un mixte composé d'or et d'argent. De plus, si la couronne contenoit plus de deux espèces de métaux, qu'on sût, par exemple, qu'elle est composée d'or, d'argent et de cuivre, le problême seroit indéterminé; car on peut combiner ensemble ces trois métaux de plusieurs manières, telles que le mixte résultant ait le même poids et le même volume. Il en est de même *à fortiori* pour un plus grand nombre de métaux.

161. *Remarque.* On explique par les principes précédens, la construction et l'équilibre des *aréomètres* ou *pèse-liqueurs*.

La forme d'un aréomètre est arbitraire jusqu'à un certain point; elle doit cependant être telle qu'il divise facilement le fluide en s'y enfonçant plus ou moins, et qu'il se maintienne dans la situation verticale. Celui de Farenheit (*Fig.* 46), a ces propriétés. Il est composé d'un long tube cylindrique *CD*, et de deux boules creuses *A*, *B*; la plus basse *B*, qui est la plus petite, reçoit du mercure, ou quelqu'autre matière pesante qui sert de *lest* à l'instrument et lui procure de la stabilité; l'autre *A*, toujours submergée, élève le centre de gravité de la partie de l'aréomètre, qui est plongée dans le

fluide ; ce qui augmente encore sa stabilité. Cet instrument peut servir à trouver les pesanteurs spécifiques des fluides, ou en le faisant enfoncer toujours à la même profondeur, au moyen de poids dont on le charge ou le décharge, ou en lui conservant le même poids, et lui permettant de s'enfoncer librement à différentes profondeurs ; ce qui fait deux cas.

1°. Supposons que l'aréomètre s'enfonce jusqu'au point M dans deux fluides différens. Soient P et $P \pm q$ les poids absolus qu'il doit avoir pour cela ; ϖ et ϖ' les pesanteurs spécifiques des deux fluides ; G le volume de la partie constante $MABN$ de l'aréomètre. On aura (151), $P = \varpi \times G$, $P \pm q = \varpi' \times G$. Donc $\varpi' = \frac{\varpi \times (P \pm q)}{P}$. Ainsi connoissant P, ϖ, et le poids additif ou soustractif q, on connoîtra ϖ'.

2°. Si l'on veut que l'aréomètre ait toujours le même poids, il s'enfoncera à différentes profondeurs dans deux fluides différens. Soient K, M les points auxquels il s'enfonce ; et nommons P son poids absolu ; H et G les volumes $KABH$, $MABN$, plongés dans les deux fluides ; ϖ et ϖ' les pesanteurs spécifiques de ces fluides. On aura $P = \varpi \times H$, $P = \varpi' \times G$; et $\varpi' = \frac{\varpi \times H}{G}$. Connoissant donc ϖ, H, G, on connoîtra ϖ'.

Lorsque l'aréomètre est d'une figure régulière et connue, il est facile de toiser, par les règles de la géométrie, les volumes H, G. Mais ordinairement

la forme de l'instrument ne permet pas d'employer cette méthode avec exactitude; et alors on s'y prendra ainsi. Les points V et K étant les extrêmes des enfoncemens dans la plus pesante et la plus légère des liqueurs dont ont veut comparer les pesanteurs spécifiques : divisez l'intervalle VK en un certain nombre de parties égales; faites enfoncer successivement l'aréomètre (en augmentant ou diminuant son lest) jusqu'à tous les points de divisions, dans un fluide dont la pesanteur spécifique soit donnée; et ayant déterminé, par le moyen de la balance ordinaire, les poids absolus et successifs de l'instrument, vous trouverez, par le moyen de l'article 152, les volumes correspondans qu'il enfonce dans le fluide. Il est évident qu'on peut faire en sorte que ces volumes croissent ou décroissent dans tel rapport qu'on voudra, en prenant les poids convenablement.

Les aréomètres sont faits ordinairement ou en verre, ou en cuivre, ou en fer-blanc, etc. Il faut employer le verre pour ceux qui sont destinés à être plongés souvent dans des liqueurs corrosives.

CHAPITRE XII.

Examen des situations d'équilibre de divers corps flottans.

162. **P**our qu'un corps solide flottant sur un fluide ne monte ni ne descende, et n'ait aucun mouvement de rotation, il faut 1°. que son poids soit égal au poids du fluide déplacé; 2°. que le centre de gravité de ce corps et celui de sa partie submergée, considérée comme homogène, soient situés sur la même ligne verticale. Je considère des corps flottans qui ont moins de pesanteur spécifique que le fluide, et qui par conséquent surnagent : objet utile en plusieurs occasions, sur-tout dans l'Architecture navale. On déterminera de même l'équilibre des corps entièrement submergés, en observant qu'alors le volume de la partie submergée est le volume total du corps; et que si le corps est supposé soutenu dans le fluide par une force étrangère, cette force doit être dirigée de bas en haut, et telle que l'excès du poids du corps sur cette même force soit égal à la poussée verticale du fluide.

163. Théorème I. *Toute figure plane homogène, divisée en deux parties égales et semblables par son axe supposé vertical, tout solide homogène produit par la révolution d'une courbe quelconque*

autour d'un axe vertical, demeurera en équilibre en flottant dans cette situation sur un fluide.

Car il est clair qu'alors, 1°. le poids de la figure ou du solide moins pesant spécifiquement que le fluide, est soutenu par la poussée verticale et contraire du fluide. 2°. Le centre de gravité de la figure ou du solide, et celui de sa partie enfoncée dans le fluide, sont placés sur une même ligne verticale.

On voit par-là qu'un triangle isocèle, une parabole, un cône droit, un cylindre droit, un ellipsoïde, etc. supposés homogènes, demeureront en équilibre sur un fluide, lorsque leurs axes seront verticaux.

164. *Remarque.* On doit observer que la proposition inverse n'est pas vraie généralement; c'est-à-dire que si un corps homogène, divisé en parties symétriques par son axe, est en équilibre sur un fluide, il ne s'ensuit pas toujours que son axe est vertical. Car nous verrons tout-à-l'heure que ce même corps peut avoir quelquefois plusieurs autres situations d'équilibre.

165. Théorème II. *Tout corps prismatique homogène, dont l'axe est horizontal, demeurera en équilibre sur un fluide, lorsque le centre de gravité de la section faite dans son milieu, parallèlement à ses bases, sera dans une même ligne verticale avec celui de la partie de cette section, qui est plongée dans le fluide.*

Car on peut regarder les centres de gravité du prisme

prisme et de sa partie plongée dans le fluide, comme réunis dans les deux points dont nous venons de parler. Le prisme est donc alors en équilibre. Ainsi, pour déterminer la situation d'équilibre de ces sortes de prismes, il suffit de déterminer celle de la section faite dans leur milieu.

166. Problème I. *Trouver la position que doit prendre le triangle homogène* ESG (Fig. 47), *flottant sur le fluide* MN, *pour demeurer en équilibre, en supposant qu'il n'y ait qu'un angle* S *d'enfoncé dans le fluide ?*

Les deux conditions requises pour l'équilibre sont, 1°. que le poids absolu du triangle ESG doit être égal au poids absolu du triangle d'eau MSN.

2°. Que les centres de gravité R et O des deux triangles ESG, MSN doivent être placés dans une même ligne RO verticale, et par conséquent perpendiculaire à la surface MN du fluide. Voici la manière de les remplir.

Ayant divisé, chacune en deux parties égales aux points P, Q, les bases EG, MN des deux triangles ESG, MSN; soient tirées les droites SP, SQ, sur lesquelles on prendra les parties $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, pour déterminer les centres de gravité R, O des deux mêmes triangles. Soient menées les droites RO, PQ, qui seront parallèles entr'elles, puisque les côtés du triangle SPQ sont coupés proportionnellement en R et O; et de plus perpendiculaires à MN, puisque RO

doit être verticale. Du point P soient abaissées les perpendiculaires PA, PD, sur les côtés SE, SG du triangle ESG, prolongés lorsqu'il est nécessaire; et soient tirées les droites PM, PN, qui sont évidemment égales entr'elles, à cause de $QM = QN$, et de PQ perpendiculaire sur MN.

Supposons	SE	$= a$
	SG	$= b$
	SP	$= c$
	le sinus total	$= 1$
	l'angle donné PSE	$= m$
	l'angle aussi donné PSG	$= n$
	SM	$= x$
	SN	$= y$
	la pesanteur spécifique du triangle	$= p$
	la pesanteur spécifique du fluide	$= \varpi$.

Les deux triangles ESG, MSN, qui ont l'angle commun S, sont entr'eux comme les produits $SE \times SG$, $SM \times SN$. Ainsi on aura, par la première condition de l'équilibre, $pab = \varpi xy$.

Dans le triangle rectangle PAS, on a $PA = PS. \sin. PSA = c \sin. m$; $SA = PS. \cos. PSA = c \cos. m$. On a pareillement dans le triangle rectangle PDS, $PD = c \sin. n$; $SD = c \cos. n$. Donc $AM = c \cos. m - x$; $DN = c \cos n - y$; $(PM)^2 = (c \sin. m)^2 + (c \cos. m - x)^2$; $(PN)^2 = (c \sin. n)^2 + (c \cos. n - y)^2$. Or $(PM)^2 = (PN)^2$. Ainsi on aura l'équation $(c \sin. m)^2 + (c \cos. m - x)^2 = (c \sin. n)^2 + (c \cos. n - y)^2$, ou simplement $xx - 2cx \cos. m = yy - 2cy \cos. n$, parce que $(\sin. m)^2 + (\cos. m)^2 = 1$, et $(\sin. n)^2 +$

$(\cos. n)^2 = 1$. Cette équation remplit la seconde condition de l'équilibre.

Il est aisé de trouver les valeurs de x et de y par la construction de deux hyperboles. Mais en employant la voie de l'élimination, et chassant y, on parviendra à l'équation déterminée,

$$x^4 - 2\,c\,x^3 \cos. m + \frac{2\,c\,p\,a\,b\,x \cos. n}{\alpha} - \frac{p^2 a^2 b^2}{\alpha^2} = 0,$$

dont les racines combinées avec l'équation $y = \frac{p\,a\,b}{\alpha\,x}$, feront connoître les différentes positions du triangle, qui admettent l'équilibre.

167. *Corollaire I.* On sait par la règle de Descartes, que dans toute équation dont les racines sont réelles, il y en a autant de positives que les signes + et — s'y trouvent de fois être changés : et autant de négatives qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes —, qui s'entresuivent. Ainsi, puisque le terme qui devroit contenir x^2 manque dans notre équation, on voit que si toutes ses racines sont réelles, il y en aura nécessairement trois positives et une négative. La racine négative ne peut pas servir, parce que la pesanteur n'ayant qu'une direction, la droite *SM* ne peut en conséquence être placée que d'un seul côté par rapport au point *S*. Mais les racines positives indiqueront des positions réelles d'équilibre, pourvu que l'on ait de plus $x < a$, et $y < b$.

168. *Corollaire II.* Supposons, pour faire une application simple de notre équation générale, que

le triangle proposé ESG soit isocèle. On aura $b = a$, $\cos. n = \cos. m$; et l'équation générale deviendra,

$$x^4 - 2\,c\,x^3 \cos. m + \frac{2\,c\,p\,a^2\,x \cos. m}{\varpi} - \frac{p^2\,a^4}{\varpi^2} = 0;$$

d'où l'on tire ces deux équations du second degré,

$$x^2 - \frac{a^2\,p}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - 2\,c\,x \cos. m + \frac{a^2\,p}{\varpi} = 0.$$

La première donne $x = \pm\, a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$, ou simplement $x = a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$, parce que la racine positive est seule utile. Or comme on a toujours $y = \frac{p\,a\,b}{\varpi\,x}$, on aura aussi $y = a \sqrt{\left[\frac{p}{\varpi}\right]}$. Donc $y = x$. Ainsi le triangle MSN est isocèle de même que le triangle $E\,S\,G$, ou ce qui revient au même, la base $E\,G$ du triangle proposé est parallèle à la surface du fluide.

La seconde équation donne $x = c \cos. m \pm \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,p}{\varpi}\right]}$. Ainsi à cause de $y = \frac{p\,a^2}{\varpi\,x}$, on aura

$$y = \frac{p\,a^2}{\varpi\left(c \cos. m \pm \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,p}{\varpi}\right]}\right)}$$

$= c \cos. m \mp \sqrt{\left[(\cos. m)^2 - \frac{a^2\,p}{\varpi}\right]}$. Ce second cas donne donc les deux combinaisons suivantes,

$$\left\{\begin{array}{l} x = c \cos. m + \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]} \\ y = c \cos. m - \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = c \cos. m - \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]} \\ y = c \cos. m + \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]} \end{array}\right\}$$

qui indiquent deux nouvelles situations d'équilibre, lorsque les valeurs de x et de y sont réelles, et que de plus on $x < a$, et $y < a$. Or pour que ces deux conditions soient remplies, il faut que l'on ait

$$1^\circ.\ \frac{a^2 p}{\varpi} < (c \cos. m)^2, \text{ ou } \frac{p}{\varpi} < \frac{(c \cos. m)^2}{a^2}.$$

$$2^\circ.\ a > c \cos. m + \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2 p}{\varpi}\right]},$$

ou $\frac{p}{\varpi} > \frac{2\, a\, c \cos. m - a\, a}{a\, a}$.

Les limites entre lesquelles est renfermée alors la valeur de $\frac{p}{\varpi}$ sont donc $\frac{(c \cos. m)^2}{a^2}$ et $\frac{2 a c. \cos. m - a a}{a a}$.

Par exemple, lorsque le triangle proposé est équilatéral, on a $c \cos. m = \frac{3}{4} a$; et ce triangle, outre la première situation d'équilibre indiquée par la première équation, pourra en avoir encore deux autres, pourvu que l'on ait $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{16}$ et $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{16}$, ou que la valeur de $\frac{p}{\varpi}$ soit comprise entre les deux fractions $\frac{9}{16}$ et $\frac{8}{16}$.

169. Problème II. *Trouver la position que doit prendre le triangle homogène* SEG (Fig. 48), *flottant sur un fluide* MN, *pour demeurer en équilibre, en supposant que les deux angles* E, G *soient enfoncés dans le fluide ?*

Il n'y a, pour résoudre ce problème, qu'à renverser de haut en bas la Figure relative au précédent, en procédant comme il suit.

Les trois centres de gravité du triangle SEG, du trapèze $MNGE$ et du triangle SMN sont toujours placés dans une même ligne droite. Or pour qu'il y ait équilibre, il faut que le centre de gravité du triangle proposé SEG et celui de sa partie $MNGE$ plongée dans le fluide, soient dans une même ligne verticale. Donc les centres de gravité des deux triangles SEG, SMN sont aussi placés dans une même ligne verticale. Du sommet S, je mène aux milieux des bases EG, MN les droites SP, SQ; et ayant pris $SR = \frac{2}{3} SP$, $SO = \frac{2}{3} SQ$, je tire par les centres de gravité R, O des deux triangles SEG, SMN, la droite RO qui est verticale, ou perpendiculaire à la surface du fluide. Soient joints les points P et Q, par la droite PQ qui est parallèle à RO; et du point P soient menées les droites PM, PN, et les perpendiculaires PA, PD, sur SE, SG respectivement. On aura, comme ci-dessus, $PM = PN$. Cela posé,

Soient	SE	$= a$
	SG	$= b$
	SP	$= c$
	le sinus total	$= 1$
	l'angle donné PSE	$= m$
	l'angle aussi donné PSG	$= n$
	SM	$= x$
	SN	$= y$
	la pesanteur spécifique du triangle SEG	$= p$
	la pesanteur spécifique du fluide	$= \varpi$.

On a $SEG : SMN :: SE \times SG : SM \times SN$; et par conséquent $SEG - SMN$ ou $EMNG : SEG :: SE \times SG - SM \times SN : SE \times SG$. Ainsi le quadrilatère $EMNG = \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$. Or la première condition de l'équilibre demande que l'on ait $p \times SEG = \varpi \times EMNG$; on aura donc $p \times SEG = \varpi \times \frac{SEG \times (SE \times SG - SM \times SN)}{SE \times SG}$, ou bien, $pab = \varpi(ab - xy)$.

On a, comme ci-dessus, $PA = c \sin. m$, $SA = c \cos. m$, $PD = c \sin n$, $SD = c \cos. n$, $AM = c \cos. m - x$, $DN = c \cos. n - y$, $(PM)^2 = (c \sin. m)^2 + (c \cos. m - x)^2$, $(PN)^2 = (c \sin. n)^2 + (c \cos. n - y)^2$. Ainsi, à cause de $PM = PN$, on aura, $xx - 2cx \cos. m = yy - 2cy \cos. n$.

Comparant cette équation avec la précédente, on trouvera, $x^4 - 2cx^3 \cos. m + \frac{2c(\varpi - p)abx \cos. n}{\varpi}$

$-\frac{(\varpi - p)^2 a^2 b^2}{\varpi^2} = 0$, équation dont les racines combinées avec l'équation $p\,a\,b = \varpi\,(ab - x\,y)$ donneront les différentes situations d'équilibre du triangle.

On voit assez que la remarque générale de l'article 167 s'applique également ici.

170. *Corollaire*. Soit $E\,S\,G$ un triangle isocèle. On aura $b = a \cos. n = \cos. m$; et notre équation deviendra $x^4 - 2\,c\,x^3 \cos. m + \frac{2\,c\,(\varpi - p)\,a^2\,x \cos. m}{\varpi}$ $- \frac{(\varpi - p)^2\,a^4}{\varpi^2} = 0$, d'où l'on tire ces deux autres équations,

$$x^2 - \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

$$x^2 - 2\,c\,x \cos. m + \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi} = 0,$$

dont la première donne $x = a \sqrt{\left[\frac{\varpi - p}{\varpi}\right]}$, $y = a \sqrt{\left[\frac{\varpi - p}{\varpi}\right]}$, et fait voir que le triangle est en équilibre lorsque sa base $E\,G$ est horizontale; la seconde donne ces deux combinaisons,

$$\begin{cases} x = c \cos. m + \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \\ y = c \cos. m - \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = c \cos. m - \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \\ y = c \cos. m + \sqrt{\left[(c \cos. m)^2 - \frac{a^2\,(\varpi - p)}{\varpi}\right]} \end{cases}$$

qui représenteront deux nouvelles situations d'équilibre, pourvu que l'on ait 1°. $\frac{p}{\varpi} > \frac{a^2 - (c \cos. m)^2}{a^2}$; 2°. $\frac{p}{\varpi} < \frac{2aa - 2ac \cos. m}{a^2}$.

Par exemple, quand le triangle ESG est équilatéral, ou qu'on a c cos. $m = \frac{3}{4} a$, si l'on a de plus $\frac{p}{\varpi} > \frac{7}{16}$ et $\frac{p}{\varpi} < \frac{8}{16}$; ce triangle aura trois situations d'équilibre sur le fluide.

171. Problème III. *Trouver la position que doit prendre le rectangle homogène* BHSK (Fig. 49) *flottant sur un fluide, pour demeurer en équilibre, en supposant qu'il n'y ait que l'angle* S *d'enfoncé dans le fluide?*

Qu'on mène du point S au point Q milieu de MN la droite SQ, et qu'on prenne $SO = \frac{2}{3} SQ$; le point O sera le centre de gravité du triangle MSN. Or comme le centre de gravité du rectangle $BHSK$ est au point d'intersection R des deux diagonales BH, SK, il s'ensuit que, si par ce point R et par le point O on tire la droite RO, cette ligne, par les conditions de l'équilibre, sera verticale, ou perpendiculaire à la surface MN du fluide. Soit prise $RP = \frac{SR}{2}$, et soit menée la ligne PQ qui sera évidemment parallèle à RO, et par conséquent perpendiculaire sur le milieu de MN. D'où il suit que les droites PM, PN, seront égales. Enfin du

point P, soient abaissées les perpendiculaires PA, PD sur SH, SK, respectivement.

Soient $\begin{cases} SH \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = a \\ SK \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = b \\ SM \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = x \\ SN \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = y \\ \text{la pesanteur spécifique du rectangle } BHSK. = p \\ \text{la pesanteur spécifique du fluide} \dots\dots = \varpi. \end{cases}$

La première condition de l'équilibre donne l'équation $pab = \frac{\varpi . xy}{2}$.

De plus, puisque l'on a $SP = \frac{3}{4} SB$, on aura $PA = \frac{3}{4} BH = \frac{3}{4} b$, $SA = \frac{3}{4} SH = \frac{3}{4} a$, $PD = \frac{3}{4} BK = \frac{3}{4} a$, $SD = \frac{3}{4} SK = \frac{3}{4} b$. Donc $(PM)^2 = \frac{9b^2}{16} + \left(\frac{3}{4}a - x\right)^2$, $(PN)^2 = \frac{9a^2}{16} + \left(\frac{3}{4}b - y\right)^2$. Ainsi, à cause de $PM = PN$, on aura

$$xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}.$$

Comparant cette équation avec la précédente, et éliminant y, on aura l'équation déterminée

$$x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pab^2x}{\varpi} - \frac{4p^2a^2b^2}{\varpi^2} = 0,$$

par le moyen de laquelle on trouvera les différentes situations d'équilibre du rectangle.

172. *Corollaire.* Soit le rectangle proposé un

carré. On aura $b = a$; notre équation devient $x^4 - \frac{3ax^3}{2} + \frac{3pa^3x}{\varpi} - \frac{4p^2a^4}{\varpi^2} = 0$, et se décompose en ces deux autres équations, $x^2 - \frac{2pa^2}{\varpi} = 0$; $x^2 - \frac{3ax}{2} + \frac{2pa^2}{\varpi} = 0$. La première donne $x = a\sqrt{\left[\frac{2p}{\varpi}\right]}$, $y = a\sqrt{\left[\frac{2p}{\varpi}\right]}$; d'où l'on voit que le carré est en équilibre, lorsque sa diagonale HK est horizontale, ce qui est évident par soi-même. La seconde donne

$$x = \frac{a\left[3 \pm \sqrt{\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}}\right]}{4},$$

$$y = \frac{a\left[3 \mp \sqrt{\frac{(9\varpi - 32p)}{\varpi}}\right]}{4},$$

d'où résultent deux nouvelles situations d'équilibre, lorsqu'on a $\frac{p}{\varpi} < \frac{9}{32}$ et $\frac{p}{\varpi} > \frac{8}{32}$.

173. *Remarque.* On trouve par la même méthode la position d'équilibre d'un rectangle dont trois angles seroient submergés. Car on n'a pour cela qu'à imaginer que la *Figure* 49 est renversée de bas en haut, que les trois angles B, H, K sont submergés, et que le triangle MSN est la partie du rectangle, saillante au-dessus de la surface MN du fluide. Ainsi en conservant les mêmes dénominations, on aura évidemment ces deux équations, $pab = \varpi\left(ab - \frac{xy}{2}\right)$; $xx - \frac{3ax}{2} = yy - \frac{3by}{2}$, qui résolvent le nouveau problème.

174. Problème IV. *Trouver la position que doit prendre le rectangle homogène* BHSK (Fig. 50), *flottant sur un fluide, pour demeurer en équilibre, en supposant que les deux angles* H *et* S *soient plongés dans le fluide ?*

* Du point M, où le côté BH rencontre la surface MN du fluide, menez au côté opposé KS la perpendiculaire MI; ce qui partage le trapèze submergé $MHSN$ en un triangle MIN et un rectangle $MHSI$; élevez par l'angle H, la verticale HL; des centres de gravité T, G, O, R, du triangle MIN, du rectangle partiel $MHSI$, du trapèze $MHSN$, et du rectangle total $BHSK$, menez à HB les perpendiculaires TE, GX, OV, RZ; menez de plus, des points O, R, V, Z, les horizontales OQ, RY, VC, ZL; et par les points V, Z, abaissez les verticales VD, ZA.

Soient
- SH .... $= a$
- HB .... $= b$
- HM .... $= x$
- SN .... $= y$
- la pesanteur spécifique du rectangle...... $= p$
- celle du fluide .... $= \varpi$.

On a d'abord, par la première condition de l'équilibre, $p \times BHSK = \varpi \times MHSN$, d'où $MHSN = \frac{pab}{\varpi}$, ou $\frac{a(x+y)}{2} = \frac{pab}{\varpi}$, ou $x + y = \frac{2pb}{\varpi}$, ou $y = \frac{2bp}{\varpi} - x$.

En considérant les momens du triangle MIN, du rectangle $MHSI$, et du trapèze $MHSN$ par rapport à HB comme axe, on aura, par la propriété des momens, $MHSN \times OV = MIN \times TE + MHSI \times GX$, ou $MHSN \times OV$

$$= \frac{MI \times IN}{2} \times \frac{2}{3} MI + HM \times MI \times \frac{MI}{2},$$

ou (en nommant D la droite OV), $\frac{pabD}{\pi}$

$$= \frac{a^2(y-x)}{3} + \frac{a^2 x}{2}, \text{ ou } D = \frac{\pi \cdot (2ay + ax)}{6pb}.$$

Le centre de gravité O du trapèze $MHSN$ est évidemment placé au milieu de la droite aOb, parallèle aux côtés opposés MH, NS; ce qui donne

$$Oa, \text{ ou } HV = \frac{HM + ca}{2} = \frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}.$$

Maintenant, le triangle MIN, comparé successivement avec les triangles HCV, ODV, HLZ, RAZ, qui lui sont tous semblables, donne $CV = \frac{IN \times HV}{MN}$, $OD = \frac{MI \times OV}{MN}$, $LZ = \frac{IN \times HZ}{MN}$,

$RA = \frac{MI \times RZ}{MN}$, c'est-à-dire (en nommant, pour abréger un peu, MN, z),

$$CV = \left[\frac{x}{2} + \frac{D(y-x)}{2a}\right] \times \frac{(y-x)}{z},$$

$$OD = \frac{aD}{z}, \; LZ = \frac{b(y-x)}{2z}, \; RA = \frac{a^2}{2z}.$$

Donc $OQ = OD + VC = \frac{aD}{z} +$

$\left[\frac{x}{2}+\frac{D(y-x)}{2a}\right].\frac{(y-x)}{z}$; $RY=RA+ZL=\frac{a^2}{2z}+\frac{b(y-x)}{2z}$. Or, puisqu'en vertu de la seconde condition de l'équilibre, les centres de gravités O, R, doivent être placés sur une même ligne verticale, on a $OQ=RY$, c'est-à-dire (en négligeant z, qui est diviseur de tous les termes), $aD+\left[\frac{x}{2}+\frac{D(y-x)}{2a}\right]\times(y-x)=\frac{a^2}{2}+\frac{b(y-x)}{2}$, ou $D[2a^2+(y-x)^2]=a^3+ab(y-x)-ax\times(y-x)$. Substituant dans cette équation pour D sa valeur $\frac{\varpi(2ay+ax)}{6pb}$ trouvée ci-dessus; substituant ensuite pour y sa valeur $\frac{2pb}{\varpi}-x$: on parviendra à l'équation déterminée du troisième degré $\left(\frac{\varpi\left(\frac{4pb}{\varpi}-x\right)}{6pb}\right)\left[2a^2+\left(\frac{2pb}{\varpi}-2x\right)^2\right]=a^2+(b-x)\left(\frac{2pb}{\varpi}-2x\right)$, ou $\varpi a^2\left(\frac{pb}{\varpi}-x\right)+2\varpi\left(\frac{4pb}{\varpi}-x\right).\left(\frac{pb}{\varpi}-x\right)^2=6pb\times(b-x).\left(\frac{pb}{\varpi}-x\right)$; équation divisible par $\frac{pb}{\varpi}-x$, et qui donne par conséquent d'abord $x=\frac{pb}{\varpi}$; ensuite l'équation du second degré

$$x^2 - \frac{2pbx}{a} + \frac{4p^2b^2}{a^2} - \frac{3pb^2}{a} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

La valeur de x, donnée par la première équation $x = \frac{pb}{a}$, étant substituée dans l'équation $y = \frac{2pb}{a} - x$, donne aussi $y = \frac{pb}{a}$. Ainsi les lignes x et y sont égales; d'où il suit que le rectangle est en équilibre lorsque le côté plongé dans le fluide est horizontal, ce qui est évident par soi-même. L'équation du second degré, donne (en déterminant d'abord x, puis mettant pour x sa valeur dans l'équation $y = \frac{2pb}{a} - x$),

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{pb \pm \sqrt{\left[3b^2(ap - p^2) - \frac{a^2a^2}{2}\right]}}{a} \\ y &= \frac{pb \mp \sqrt{\left[3b^2(ap - p^2) - \frac{a^2a^2}{2}\right]}}{a} \end{aligned} \right\}.$$

Ainsi le rectangle proposé pourra avoir deux nouvelles situations d'équilibre, pourvu que, 1°. les valeurs de x et de y soient réelles; 2°. qu'elles soient positives; 3°. que chacune d'elles soit moindre que b.

175. *Corollaire*. Supposons que le rectangle proposé devienne un carré, ou que l'on ait $b = a$. Ce carré est d'abord en équilibre, lorsque son côté qui est plongé dans le fluide est horizontal. De plus on a ces équations,

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap + a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \dfrac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \\ y = \dfrac{ap - a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \dfrac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{ap - a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \dfrac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \\ y = \dfrac{ap + a\sqrt{\left[3(\varpi p - p^2) - \dfrac{\varpi^2}{2}\right]}}{\varpi} \end{array}\right\}$$

d'où suivent deux nouvelles situations d'équilibre, lorsque la fraction $\frac{p}{\varpi}$ sera comprise entre $\frac{3}{4}$ et $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$.

176. Problème V. *Trouver la position que doit prendre la parabole homogène* ABC (Fig. 51), *flottante sur un fluide pour demeurer en équilibre, en supposant que sa partie* FMN *soit seule plongée, et que les points* B, C *soient hors du fluide ?*

Il est d'abord évident que la parabole ABC, supposée moins pesante spécifiquement que le fluide, est en équilibre lorsque son axe est vertical. Mais il s'agit ici de savoir en général si elle ne peut pas encore être en équilibre, quand son axe est incliné.

Soient AD l'axe de la courbe, BD ou BC sa dernière ordonnée. Ayant tiré par le point H, milieu de MN, et parallèlement à DA, le diamètre HF, je mène du point F l'ordonnée FG, la droite FX,

au

au foyer X, et la tangente FT qui rencontre en T l'axe DA prolongé, et qui, par la propriété de la parabole, est parallèle à MN. Du point M, j'abaisse MY perpendiculaire sur FH prolongée. Je joins les centres de gravité K et I de la parabole ABC et de sa partie FMN, par la droite KI qui, en vertu de l'équilibre, doit être verticale, ou perpendiculaire à MN.

Soient
- AD .... $= a$
- BD .... $= b$
- le paramètre de l'axe $AD = \frac{bb}{a}$ ...... $= c$
- FH .... $= x$
- MH .... $= y$
- FG .... $= z$
- la pesanteur spécifique de la parabole.... $= p$
- la pesanteur spécifique du fluide......... $= \pi$

On aura, par la propriété de la parabole, $AK = \frac{3}{5} AD = \frac{3}{5} a$; $FI = \frac{3}{5} FH = \frac{3}{5} x$; $GT = 2 GA = \frac{2z^2}{c}$; $FT = \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c}$.

Les deux triangles semblables FGT, MYH, donnent $FT : FG :: MH : MY = \frac{cy}{\sqrt{(cc+4zz)}}$.

Or, l'aire parabolique $ABC = \frac{4}{3} BD \times DA$, et l'aire $FMN = \frac{4}{3} MY \times FH$. Ainsi on aura, par la première condition de l'équilibre,

$$pab = \frac{\pi cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}.$$

Comme la seconde condition de l'équilibre est

évidemment remplie lorsque l'axe de la parabole est vertical, et que par conséquent $z = o$, on voit, par l'équation précédente, que dans ce cas particulier, on a $pab = \varpi yx = \varpi x \sqrt{cx}$, en observant qu'alors $y = \sqrt{cx}$. D'où résulte $x = a \sqrt[5]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$. Mais revenons au problême général où le point F ne tombe pas sur le point A.

La propriété de la parabole donne $FX = \frac{cc + 4zz}{4c}$; $yy = x \times 4FX = \frac{x(cc + 4zz)}{c}$, et $y = \frac{\sqrt{x} . \sqrt{(cc + 4zz)}}{\sqrt{c}}$. Substituant cette valeur de y dans l'équation générale $pab = \frac{\varpi cyx}{\sqrt{(cc + 4zz)}}$, on trouvera $x = a \sqrt[5]{\frac{p^2}{\varpi^2}}$; d'où l'on voit que la valeur de x est toujours la même, quelle que puisse être la position de la parabole sur le fluide *.

La droite KI étant perpendiculaire à MN, les deux triangles FGT, ILH sont semblables et donnent $FT : GT :: IH : HL = \frac{4xz}{5\sqrt{(cc + 4zz)}}$.

* Nous observerons à cette occasion, que si dans une parabole les abscisses de deux diamètres quelconques, comptées de leurs sommets, sont égales; les parallélogrammes formés par les deux ordonnées, les deux tangentes et les autres côtés parallèles aux diamètres, seront égaux, et les espaces paraboliques seront aussi égaux; ce qui est analogue à la propriété qu'ont les parallélogrammes faits autour de diamètres conjugués, dans l'ellipse ou l'hyperbole, d'être égaux entr'eux.

Donc $L\,O = H\,O - H\,L = F\,T - H\,L$ $= \frac{z\sqrt{(cc+4zz)}}{c} - \frac{4xz}{5\sqrt{(cc+4zz)}}$. Les deux triangles semblables $F\,G\,T$, $K\,L\,O$ donnent $GT : FT :: LO : OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$. Mais d'un autre côté, on a $OK = K\mathcal{A} - O\mathcal{A}$ $= K\,\mathcal{A} - (O\,T - \mathcal{A}\,T) = \frac{3}{5}\,a - x$ $+ \frac{z^2}{c}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de $O\,K$, on trouvera $zz = \frac{6ac - 5cc - 6cx}{10}$, ou bien (en mettant pour x sa valeur trouvée ci-dessus), $zz = \frac{6ac - 5cc}{10} - \frac{6ac}{10}\sqrt[5]{\frac{p^2}{\pi^2}}$; ce qui donne deux nouvelles situations d'équilibre, semblables, l'une à droite, l'autre à gauche, pourvu que l'on ait $6\,a > 5\,e + 6\,a \times \sqrt[5]{\frac{p^2}{\pi^2}}$, ou $\frac{p}{\pi} < \left(\frac{6a - 5c}{6a}\right)^{\frac{5}{2}}$, quantité supposée réelle et prise positivement.

177. Problème VI. *On suppose maintenant que la parabole* ABC *n'ait pas le même centre de gravité que de figure, soit parce qu'elle n'est pas homogène dans toute son étendue, soit parce qu'elle est chargée de quelque corps étranger placé ailleurs qu'à son centre de figure, et lié solidement avec elle : il s'agit de trouver la position qu'elle doit prendre pour être en équilibre sur le fluide* MN?

Soit le point K' le centre de gravité du système de tous les poids dont la parabole ABC est chargée, et qui font équilibre à la poussée verticale et contraire du fluide. Ce point K' étant donné de position, si l'on mène la droite $K'V$ perpendiculaire à l'axe AD de la parabole, cette ligne et la partie correspondante AV de l'axe seront données. Soit FMN l'espace parabolique, plongé dans le fluide. Par le centre de gravité I de cet espace considéré comme homogène, et par le point K', je mène la droite IK' qui doit être nécessairement verticale à cause de l'équilibre, et qui va rencontrer en K l'axe AD. J'achève la construction comme dans l'article précédent, et je garde les mêmes dénominations, en faisant de plus $K'V = k$, $AV = h$; et observant que par p on doit entendre ici la pesanteur spécifique d'un corps de même poids que la parabole ABC, et dont le volume seroit l'aire ABC supposée homogène. On trouvera, comme tout-à-l'heure, l'équation, $pab = \frac{\pi cyx}{\sqrt{(cc+4zz)}}$, qui remplit la première condition de l'équilibre. Ensuite on trouvera $x = a\sqrt[3]{\frac{p^2}{\pi^2}}$

Les trois triangles semblables FGT, ILH, KLO, donnent, comme ci-dessus, $OK = \frac{cc+4zz}{2c} - \frac{2x}{5}$; et les deux triangles semblables FGT, KVK' donnent $GT : FG :: VK' : VK =$

$\frac{ck}{2z}$. Donc $OV = OK - VK = \frac{cc + 4zz}{2c} - \frac{2x}{5} - \frac{ck}{2z}$. Mais d'un autre côté, $OV = VT - OT = AV + AT - HF = h + \frac{z^2}{c} - x$.

Égalant entr'elles les deux valeurs de OV, on trouvera $10z^3 - (10ch - 6cx - 5c^2)z - 5c^2k = 0$, équation dont les racines (après avoir mis pour x sa valeur trouvée ci-dessus) feront connoître les positions d'équilibre de la parabole.

En faisant $k = 0$, $h = \frac{3}{5}a$, on retombe dans la solution précédente, comme cela doit être.

Je ne multiplierai pas davantage ces applications. On procédera d'une manière analogue dans les autres cas, soit que les corps flottans soient homogènes ou non.



CHAPITRE XIII.

De la stabilité des corps flottans : des oscillations simples que font ces corps dérangés de la situation d'équilibre.

178. TOUTES les situations d'équilibre d'un corps ont la même fin, celle d'établir l'immobilité de ce corps; mais toutes ne lui procurent pas le même degré de consistance ou de stabilité; et si par quelque cause extérieure, l'équilibre vient à être dérangé, il est possible que le corps achève de trébucher, ou qu'il revienne à sa première situation. Or, par rapport aux corps flottans, il existe en effet de telles causes extérieures : par exemple, l'impulsion du vent, l'agitation des lames, etc., qui tendent continuellement à troubler l'équilibre. Ce n'est donc pas assez que le centre de gravité du corps, et celui de sa partie submergée, toujours regardée comme homogène, soient placés sur une même ligne verticale : la position respective de ces deux points sur cette ligne et leurs distances mutuelles, rendent l'état d'équilibre plus ou moins ferme, ainsi qu'on le verra bientôt.

Je supposerai toujours, pour parvenir à des résultats simples et satisfaisans, que les inclinaisons d'où résultent les dérangemens des situations d'équilibre, puissent être regardées comme très-petites;

j'examinerai les oscillations qu'elles produisent autour d'un axe *fixe*; j'appelle *simples* ces sortes d'oscillations, pour les distinguer de celles qui ont lieu autour de plusieurs axes, et dont il sera parlé dans le chapitre suivant.

179. Avant d'entrer en matière, rappelons-nous ici un Théorème de mécanique dont nous allons faire usage. *Lorsqu'un corps est poussé suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité, ce point est mu comme s'il se trouvoit sur la direction de la force motrice; et le corps tourne autour de ce même point comme s'il étoit fixe.* D'où il suit que si un corps est poussé par deux forces parallèles et égales, de directions opposées, l'une passant par le centre de gravité, l'autre à une distance quelconque de ce point, le centre de gravité demeure immobile; mais, en vertu de la seconde force, le corps tourne autour du centre de gravité, comme si cette force existoit seule, et que le centre de gravité fût un point fixement arrêté. Voyez, pour la démonstration et pour un plus ample développement, mon *Traité de Mécanique*, articles 449, 450, etc.

180. Problême I. *Déterminer les conditions de la stabilité d'une figure plane verticale flottante sur un fluide?*

Il peut arriver que le centre de gravité de la figure entière soit placé plus bas que celui de sa partie submergée, soit parce que la figure n'est pas homogène, soit parce qu'elle est chargée de quelque corps

étranger placé vers le fond; ou bien que le premier centre soit placé plus haut que le second.

Ier. Cas. Soit (*Figure* 52) ABK la figure proposée, d'abord en équilibre; MN, la ligne de flottaison; G le centre de gravité de tout le poids de la figure; F celui de sa partie submergée que l'on regarde toujours comme homogène, ainsi que les autres parties de pareille nature. Les deux points G et F sont placés sur une même ligne verticale GZ, tant que l'équilibre subsiste. Mais supposons que par quelque cause extérieure, la figure ABK s'incline un peu du côté de B, ou ce qui revient au même, que la figure demeurant immobile, la ligne de flottaison prenne la position mn; avec cette condition, que la nouvelle partie submergée soit égale à la première MNK: qu'ensuite la figure soit abandonnée uniquement à l'action de la pesanteur et de la poussée verticale du fluide. On voit d'abord, par l'article précédent, qu'à cause de $mnK = MNK$, le centre de gravité G de la figure ne monte ni ne descend. La partie $NVmK$ étant commune aux deux surfaces mnK, MNK, les deux triangles NVn, MVm, sont égaux, c'est-à-dire, qu'en menant leurs hauteurs nf, mh, on a $\frac{NV \times nf}{2} = \frac{MV \times mh}{2}$. Or, $Vf : Vh :: nf : mh = \frac{nf \times Vh}{Vf}$; et comme l'inclinaison de la figure est supposée très-petite, on a sensiblement $Vf = VN$, $Vh = VM$;

ce qui donne $mh = \frac{nf \times VM}{VN}$. Substituant cette valeur de mh dans l'équation $\frac{NV \times nf}{2} = \frac{MV \times mh}{2}$, on trouvera $(NV)^2 = (MV)^2$, ou $NV = MV$; d'où il suit que le point V où les deux lignes de flottaison se coupent, est le milieu de MN.

Ayant mené par le point I, centre de gravité de la partie submergée mnK, la droite Ig perpendiculaire à la surface actuelle mn du fluide, et qui rencontre en g la verticale GZ, il est clair que comme le point g est placé au-dessus du centre de gravité G de la figure, la poussée verticale actuelle du fluide qui s'exerce suivant Ig, et qui tend à faire tourner la figure autour d'un axe horizontal passant par le centre de gravité G, la ramène vers la situation d'équilibre, et que par conséquent la figure a de la stabilité.

Par le centre de gravité G de la figure, celui F de la partie MNK primitivement submergée, et ceux des triangles NVn, MVm, soient menées perpendiculairement à mn les droites Gi, DFd, yx, zu; de plus soit menée, par le point G, la droite GDE perpendiculaire aux parallèles DFd, EIg, et par conséquent horizontale. Les surfaces mnK, MNK, NVn, MVm doivent être considérées ici comme exprimant des poussées verticales du fluide, et par conséquent comme des forces verticales, dirigées de bas en haut, ayant le centre de gravité de leur système, placé à la droite de GZ.

Maintenant, puisque $mnK + MVn = MNK + NVn$, les deux forces résultantes ($mnK + MVm$), et ($MNK + NVn$), seront en équilibre, si de plus ces deux forces ont des momens égaux par rapport à la verticale Gi; c'est-à-dire, si (en désignant les momens par la lettre initiale M placée au-devant des forces), on a l'équation $M.(mnK + MVm) = M.(MNK + NVn)$. Or la force ($mnK + MVm$) étant composée des deux forces mnK, MVm, dont les directions sont placées de différens côtés par rapport à l'axe Gi, on a $M.(mnK + MVm) = M.mnK - M.MVm = mnK \times GE - \frac{MV \times mh}{2} \times iz$; et la force ($MNK + NVn$) étant composée des deux forces MNK, NVn dont les directions tombent du même côté de l'axe, on a $M.(MNK + NVn) = M.MNK + M.NVn = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times ix$. On aura donc, $mnK \times GE - \frac{MV \times mh}{2} \times iz = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times ix$; ou, $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{NV \times nf}{2} \times (iz + ix) = MNK \times GD + \frac{MN \times nf}{4} \times \frac{2}{3} mn = MNK \times GD + \frac{(MN)^2 \times nf}{6}$; équation où $mnK \times GE$ exprime le moment de

la poussée verticale actuelle du fluide, ou la mesure de la stabilité. Il ne s'agit donc plus que de réduire cette équation à sa forme la plus simple.

Lorsque la ligne de flottaison a passé de la position MN à la position mn, un point quelconque, par exemple le point Z, placé sur la verticale GZ, a décrit l'arc ZQ, tel que le côté GZ étant perpendiculaire à MN, le côté GQ est perpendiculaire à mn, et tous les angles ZGQ, GFD, NVn, MVm sont égaux. Donc, en nommant R le rayon donné GZ, Z l'arc ZQ, on aura $GD = FG \times \frac{Z}{R}$; $nf = NV \times \frac{Z}{R} = \frac{MN}{2} \times \frac{Z}{R}$; valeurs qui étant substituées dans l'équation $mnK \times GE = MNK \times GD + \frac{(MN)^2}{6} \times nf$, donnent $mnK \times GE = \left(MNK \times FG + \frac{(MN)^3}{12}\right) \times \frac{Z}{R}$.

IIe. Cas. Le centre de gravité de la figure est ici placé en G', au-dessus de celui F de la partie MNK primitivement submergée; je mène par ce point les droites $G'i'$, $D'G'E'$, l'une perpendiculaire, l'autre parallele à mn; tout le reste est d'ailleurs le même. On a toujours $M.(mnK + MVm) = M.(MNK + NVn)$. Or, $M.(mnK + MVn) = M.mnK - M.MVm = mnK \times G'E' - \frac{MV \times mh}{2} \times i'z$; et semblablement, $M.(MNK + NVn) = M.NVn - M.MNK = \frac{NV \times nf}{2} \times i'x - MNK \times G'D'$.

On aura donc $mnK \times G'E' - \frac{MV \times mh}{2} \times i'z = \frac{MV \times nf}{2} \times i'x - MNK \times G'D'$; d'où l'on tire, en opérant comme ci-dessus, $mnK \times G'E' = \left(\frac{(MN)^3}{12} - FG' \times MNK\right) \times \frac{Z}{R}$.

En réunissant les deux cas à l'aide du double signe $\pm$, et nommant D la distance initiale du centre de gravité de la figure à celui de sa partie submergée, nous aurons, pour l'expression du moment de la poussée verticale actuelle de l'eau, $\left(\frac{(MN)^3}{12} \pm D \times MNK\right) \times \frac{Z}{R}$.

181. *Corollaire.* On voit que dans le premier cas, la figure a toujours de la stabilité; et que toutes choses d'ailleurs égales, elle en a d'autant plus, que son centre de gravité est placé plus bas par rapport à celui de sa partie submergée, ou que la distance D de ces deux points est plus grande.

La figure a aussi de la stabilité dans le second cas, lorsque la quantité $\frac{(MN)^3}{12} - D \times MNK$ est positive; et d'autant plus, que cette quantité est plus grande. Mais si cette même expression étoit négative, la figure manqueroit de stabilité; l'inclinaison primitive augmenteroit, et la figure finiroit par trébucher.

Si on avoit $\frac{(MN)^3}{12} - D \times MNK = 0$,

(ce qui est toujours relatif au second cas), la figure seroit indifférente à tourner dans un sens ou dans un autre, et la plus petite force étrangère la feroit verser. De plus, on auroit $MNK \times G'E' = 0$, ou $G'E' = 0$. D'où il suit qu'alors le centre de gravité de la figure tombe sur le point g, intersection des deux perpendiculaires menées des centres de gravité des deux parties submergées dans les deux positions de la figure, aux deux lignes de flottaison. Si l'on veut donc que cette figure ait de la stabilité, il faut que son centre de gravité soit toujours placé au-dessous du point g.

Le point g est celui que Bouguer appelle *métacentre*, dans son *Traité du Navire*, et au-dessous duquel doit tomber le centre de gravité du poids total d'un Vaisseau, pour que ce Vaisseau flottant à la mer ait de la stabilité.

182. Problème II. *Déterminer les mouvemens d'oscillation que fera la figure dans l'hypothèse du Problême précédent, et qu'elle ait de la stabilité ?*

La figure ayant été inclinée de manière que le point donné Z a décrit l'arc ZQ, on doit considérer l'angle ZGQ comme donné, et comme celui d'inclinaison initiale. Maintenant, la figure revient sur ses pas en vertu de la poussée verticale du fluide qui s'exerce suivant Gi ou $G'i'$; et dans un temps t, le point Q décrit un arc QR, tel que

si l'on nomme z cet arc, S la somme des produits des élémens de toute la figure par les carrés de leurs distances au point G, on a, par les formules ordinaires des forces accélératrices (*Voyez mon Traité de Mécan. art.* 451, *et not. IV*),
$\left(\frac{(MN)^3}{12} \pm D \times MNK\right) \times \frac{Z}{R} = \frac{S}{R} \times \frac{ddz}{dt^2}$.
Or, cette équation est exactement de la même nature que celle d'un pendule oscillant autour d'un point fixe. Car soit (*Fig.* 53), P un pendule suspendu au point fixe G, autour duquel il oscille : qu'on écarte ce pendule de la verticale GZ, de sorte que l'angle ZGQ soit ici le même que dans la *Figure* 52 : que le pendule partant de la position P, décrive dans le temps t l'arc Pp, et le point Q l'arc $QR = u$. On aura (en nommant s la somme des produits des élémens de P par les carrés de leurs distances au point G), $P \times GP \times \frac{Z}{R} = \frac{s}{R} \times \frac{ddu}{dt^2}$. D'où l'on voit que les mouvemens du pendule et de la figure proposée sont semblables; et si l'on veut que ces mouvemens soient exactement les mêmes, on n'aura qu'à égaler la valeur de $\frac{ddu}{dt^2}$ à celle de $\frac{ddz}{dt^2}$. Cette condition donne $\frac{P \times GP}{s} = \frac{(MN)^3 \pm 12 D \times MNK}{12 S}$. Soit P un pendule *simple*, c'est-à-dire, un poids assez petit pour que toute sa masse puisse être censée réunie en un

même point, et nommons L la longueur de ce pendule, ou la distance GP; on aura alors $s = P \times L^2$; et l'équation précédente nous donnera, $L = \frac{12 S}{(MN)^3 \pm 12 D \times MNK}$: expression de la longueur d'un pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps que la figure proposée. Ainsi, comme les oscillations de ce pendule sont *isochrones* entr'elles, et ne cessent que par la résistance de l'air ou des autres obstacles qui peuvent anéantir le mouvement : les oscillations de la figure seront aussi isochrones, et ne s'éteindront que par la résistance qu'elle éprouve en frappant l'air et l'eau.

183. Exemple. *La figure proposée étant un triangle isocèle homogène* ABK (Fig. 54), *et la partie submergée* MNK *étant aussi un triangle isocèle, on demande la valeur de* L.

Ayant mené du sommet K la perpendiculaire KCD sur les bases parallèles MN, AB, nommons MN, a; KC, c; AB, f; KD, g; p, la densité ou la pesanteur spécifique du triangle; ϖ, la densité ou la pesanteur spécifique du fluide : on aura d'abord $pfg = \varpi ac$, ou bien encore (à cause des triangles semblables ABK, MNK), $pf^2 = \varpi a^2$; $pg^2 = \varpi c^2$.

Le dénominateur de L a pour valeur relative au volume, $a^3 - 4ac(g - c)$. Mais, comme dans ces problêmes, il faut prendre les quantités relativement aux masses, cette valeur, qui se rapporte

au triangle fluide MNK, doit être multipliée par ϖ. Je la suppose positive, afin que la figure ait de la stabilité.

Pour trouver S, d'une manière fort simple, je cherche la somme des produits des élémens du triangle ABK, par les carrés de leurs distances au sommet K, et j'emploie ce Théorème général de mécanique (Voyez mon *Traité, articles* 487 *et* 488) : *la somme des produits des élémens d'un corps par les carrés de leurs distances à un axe qui ne passe pas par le centre de gravité, est égale à la somme des produits des mêmes élémens par les carrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité et parallèle au précédent, plus au produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux axes.*

Soit donc VE une perpendiculaire quelconque à l'axe KD du triangle ABK; soit pris sur cette ligne l'élément Tt, et soit tirée TK. La somme des produits de tous les points de VE par les carrés de leurs distances au sommet K est $\int Tt \times (TK)^2 = \int Tt \times (EK)^2 + \int Tt \times (TE)^2 = VE \times (EK)^2 + \frac{(VE)^3}{3}$ $= (EK)^3 \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right)$, à cause de $VE = EK \times \frac{AD}{KD}$. Soit pris le point e infiniment près de E : la somme des produits de tous les points du triangle ABK, par les carrés de leurs

leurs distances au sommet K, sera $2 \int E e \times (EK)^3 \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right) = \frac{(KD)^4}{2} \times \left(\frac{AD}{KD} + \frac{(AD)^3}{3(KD)^3}\right) = \frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48}$. Maintenant, on a, par le Théorème cité, $\frac{fg^3}{4} + \frac{gf^3}{48} = S + \frac{fg}{2} \times \frac{4g^2}{9}$; d'où l'on tire $S = \frac{fg \times (3ff + 4gg)}{144}$. Cette valeur, qui est relative au volume et qui appartient au triangle solide ABK, doit être multipliée par p, afin d'avoir une quantité relative à la masse.

Donc enfin $L = \frac{pfg(3ff + 4gg)}{\varphi[12a^2 - 48ac(g - c)]}$;

ou $L = \frac{c(3ff + 4gg)}{12[a^2 - 4c(g - c)]}$.

184. *Scholie.* Il est facile d'appliquer la même théorie à la recherche de la stabilité et des oscillations simples d'un corps solide flottant sur un fluide. Car soit ABK (*Fig.* 52), la coupe verticale du corps, perpendiculaire à l'axe de rotation qui y est représenté par le point G ou G'. Que F représente l'axe horizontal, perpendiculaire à ABK, et passant par le centre de gravité de la partie du corps, plongée dans le fluide. Soit achevée d'ailleurs la construction comme dans l'article 180. Il est évident que tout est le même dans les deux cas, avec cette différence qu'ici MN est le profil de la surface

de flottaison du corps, et que NVn, MVm représentent deux onglets formés par la rotation des surfaces NV, MV, autour de l'axe horizontal désigné par le point V dans le profil ABK. Ces deux onglets sont nécessairement égaux, parce qu'on suppose que le centre de gravité du corps ne monte ni ne descend. Ainsi l'axe horizontal, représenté par le point V, passe par le centre de gravité de la surface de flottaison MN; car l'égalité des deux onglets rend les distances des centres de gravité des deux surfaces NV, MV, à l'axe V, réciproquement proportionnelles à ces mêmes surfaces. D'après ces notions, et les principes établis, on trouvera les conditions de la stabilité du corps, et la longueur du pendule simple qui fait ses oscillations dans le même temps que ce corps.

CHAPITRE XIV.

Continuation du même sujet : Théorie générale des mouvemens très-petits, ascensionnels et oscillatoires des corps flottans.

185. DANIEL BERNOUILLI, Euler et d'Alembert, ont résolu successivement et en différens temps les principales questions relatives à cette matière (Voyez les *Mémoires de l'Académie de Pétersbourg*, année 1739; la *Science Navale* d'Euler;

la *Résistance des fluides* de d'Alembert, et le *tome I* de ses *Opuscules mathématiques*). J'ai aussi traité le même sujet dans mes deux Pièces *sur l'arrimage des Vaisseaux*, qui partagèrent les Prix de l'Académie des Sciences de Paris, en 1761 et 1765. Comme il appartient à l'Hydrostatique et à la Mécanique, il doit naturellement trouver encore place dans cet Ouvrage. Je commence par les principes de Mécanique et de Géométrie qui me seront nécessaires.

186. Lemme *I. Le centre de gravité ou de masse* G *d'un corps* (Fig. 55), *parcourant suivant une loi quelconque la droite* GX; *si l'on mène par ce point et perpendiculairement à* GX, *le plan* AD *qui conserve toujours son parallélisme dans l'espace absolu; qu'ensuite on suppose que chaque molécule du corps parcoure perpendiculairement et relativement au plan* AD *l'espace* pm : *on aura* (*en nommant* dP *chaque molécule élémentaire du corps*, p *l'espace parcouru* pm, dt *l'élément du temps*, ϕ *la force accélératrice suivant* pm), *on aura, dis-je, pour l'étendue entière du corps*, $\int p\, dP = 0$; *et* $\int \phi\, dP = 0$, ou $\int \frac{dP \cdot ddp}{dt^2} = 0$.

Les espaces *p m* étant simplement parcourus relativement au plan *A D*, nous pouvons toujours supposer que ce plan est en repos, en imaginant, pour cela, qu'on imprime au centre de gravité *G* un mouvement égal et contraire à celui qu'il a. Cela posé, il est clair, 1°. que l'intégrale $\int p\, dP$,

appliquée à tous les points de la masse du corps, exprime la différence qui se trouve entre la somme des produits des molécules de la partie AED du corps, multipliées chacune par le chemin qu'elle décrit de gauche à droite, perpendiculairement au plan AD, et la somme des produits des molécules de la partie AFD, multipliées chacune par le chemin qu'elle décrit de droite à gauche, perpendiculairement au même plan. Or, quand le centre de gravité est immobile, ou regardé comme tel, cette différence est égale à zéro. (*Voyez mon Traité de Mécanique, art.* 403, *et suiv*).

2°. La quantité $\int \phi\, dP$ ou $\int \frac{dP \cdot ddp}{dt^2}$ est aussi zéro pour l'étendue entière du corps : car les forces ϕ étant, par exemple, positives pour la partie AED du corps, elles sont négatives pour la partie AFD; et il y a autant de $\phi\, dP$ pour l'une de ces parties que pour l'autre, puisque le centre de gravité est ici regardé comme immobile. Donc on a, pour le corps entier, $\int \phi\, dP = 0$, ou $\int \frac{dP \cdot ddp}{dt^2} = 0$.

187. Lemme II. *Déterminer les conditions générales de l'équilibre entre les forces qui sollicitent un corps en mouvement, et les résistances qu'il leur oppose par son inertie ?*

I. Imaginons par un point fixe A (*Fig.* 56), trois axes AP, AC, AB, perpendiculaires entre eux, et immobiles dans l'espace absolu. On peut concevoir, pour fixer l'imagination, que les deux

axes AP, AC sont situés dans le plan de la planche, et que l'axe AB est perpendiculaire au même plan. Quel que puisse être le nombre, et quelles que puissent être les directions des forces appliquées au corps proposé, il est clair que toutes ces forces pourront toujours, à chaque instant, être réduites à trois forces seulement, parallèles chacune à chacun des trois axes AP, AC, AB. Je suppose que ces forces ainsi réduites, sont dirigées dans les sens Ff, Ee, Dd, et qu'elles sont exprimées par les lignes Ff, Ee, Dd. D'un point quelconque N du corps, soit abaissée NM perpendiculairement au plan CAP, et soit tirée MP perpendiculaire à AP. Soit décomposée la résistance que la molécule du corps, placée en N, oppose au mouvement par son inertie, en trois forces Np, Nm, Nn parallèles respectivement aux trois axes AP, AC, AB. Pour que l'équilibre dont nous avons parlé ait lieu, il faut 1°. que la résultante ou la somme de chacune de ces forces élémentaires, soit égale à la force sollicitante qui lui correspond; 2°. que le moment provenant des premières forces, par rapport à chacun de nos trois axes, soit égal au moment correspondant qui provient des forces sollicitantes.

Soient Force $Ff = F$; Force $Ee = E$; Force $Dd = D$; $AP = q$; $PM = r$; $NM = s$; l'élément du temps $= dt$; chaque molécule du corps $= dP$; on aura d'abord ces trois équa-

tions $F = \int -\frac{dPddq}{dt^2}$, $E = \int \frac{dPddr}{dt^2}$, $D = \int \frac{dPdds}{dt^2}$, qui sont relatives au mouvement de translation du corps.

Ayant supposé que les directions des forces F, E, D rencontrent les trois plans BAC, BAP, CAP aux points F, E, D respectivement; soient menées parallèlement à CA les droites FO, DK aux deux axes AB, AP; parallèlement à AB les droites FQ, ER aux deux axes AC, AP; parallèlement à AP les droites ES, DH aux deux axes AB, AC. Il est visible que le moment de la force F, par rapport à AP est nul; que le moment de cette force par rapport à AC est $F \times FQ$; que le moment de cette même force par rapport à AB est $F \times FO$; que le moment de la force E par rapport à AC est nul; que le moment de cette force par rapport à AB, est $E \times ES$; que le moment de cette même force par rapport à AP, est $E \times ER$; que le moment de la force D par rapport à AB, est nul; que le moment de cette force par rapport à AC, est $D \times DH$; que le moment de cette même force par rapport à AP, est $D \times DK$. De la combinaison de ces momens, résulte pour chaque axe un moment unique, et en désignant ce moment par la lettre initiale M, placée au-devant de l'axe, on a

$$M.AC = F \times FQ - D \times DH,$$
$$M.AB = F \times FO - E \times ES,$$
$$M.AP = E \times ER - D \times DK.$$

En analysant de la même manière les momens de la résistance de la molécule dP placée en N, par rapport aux trois axes AC, AB, AP, il résultera,

$$M . AC = \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2},$$

$$M . AB = \int \frac{r\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,ddr}{dt^2},$$

$$M . AP = \int \frac{s\,dP\,ddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dP\,dds}{dt^2}.$$

Égalant chacun à chacun ces momens aux momens correspondans des forces sollicitantes, on aura ces trois autres équations, relatives aux mouvemens de rotation :

$$F \times FQ - D \times DH = \int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,dds}{dt^2},$$

$$F \times FO - E \times ES = \int \frac{r\,dP\,ddq}{dt^2} - \int \frac{q\,dP\,ddr}{dt^2},$$

$$E \times ER - D \times DK = \int \frac{s\,dP\,ddr}{dt^2} - \int \frac{r\,dP\,dds}{dt^2}.$$

II. Par le centre de gravité G du corps, concevons trois nouveaux axes GV, GT, GY, parallèles chacun à chacun des axes fixes AP, AC, AB. Ces axes GV, GT, GY sont mobiles avec le centre de gravité; mais chacun d'eux demeure toujours parallèle à lui-même. Soient par rapport au point G, les trois coordonnées GV, VL, LN, qui répondent au point N. Ayant prolongé l'axe VG jusqu'à ce qu'il rencontre en Z le plan BAC, du point Z soient menées les droites ZI, ZX parallèles cha-

cune à chacun des deux axes AC, AB. Conservons les dénominations précédentes, et supposons de plus $ZG = \Pi$, $AX = \varpi$, $AI = \theta$, $GV = q'$, $VL = r'$, $LN = s'$, la distance de la droite Ff au plan $TGV = \alpha$, la distance de la même ligne au plan $YGV = \beta$, la distance de la droite Ee au plan $YGT = \delta$, la distance de la même ligne au plan $TGV = \gamma$, la distance de la droite Dd au plan $YGT = \phi$, la distance de la même ligne au plan $YGV = \xi$. On aura évidemment $q = \Pi + q'$, $r = \varpi + r'$, $s = \theta + s'$, $ddq = dd\Pi + ddq'$, $ddr = dd\varpi + ddr'$, $dds = dd\theta + dds'$, $FQ = \theta + \alpha$, $FO = \varpi + \beta$, $ES = \Pi + \delta$, $ER = \theta + \gamma$, $DH = \Pi + \phi$, $DK = \varpi + \xi$. Substituant toutes ces valeurs dans les six équations fondamentales du numéro précédent, on aura 1°. les trois équations, $F = \int \frac{dPdd\Pi}{dt^2} + \int \frac{dPddq'}{dt^2}$, $E = \int \frac{dPdd\varpi}{dt^2} + \int \frac{dPddr'}{dt^2}$, $D = \int \frac{dPdd\theta}{dt^2} + \int \frac{dPdds'}{dt^2}$.
Or, par la seconde partie du Lemme précédent, on a $\int \frac{dPddq'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dPddr'}{dt^2} = 0$, $\int \frac{dPdds'}{dt^2} = 0$.
De plus, comme $dd\Pi$, $dd\varpi$, $dd\theta$, sont les mêmes pour tous les points du corps, on voit que nos trois premières équations deviennent $F = \frac{Pdd\Pi}{dt^2}$, $E = \frac{Pdd\varpi}{dt^2}$, $D = \frac{Pdd\theta}{dt^2}$.

2°. Pour savoir ce que deviennent les trois autres équations, considérons d'abord les parties corres-

pondantes $F \times QF$ et $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$ de la première.

On a $F \times FQ = F \times \theta + F \times \alpha$; et $\int \frac{s\,dP\,ddq}{dt^2}$
$= \int \frac{(\theta + s')\,dP\,(dd\Pi + ddq')}{dt^2} = \int \frac{\theta\,dP\,dd\Pi}{dt^2} +$
$\int \frac{s'\,dP\,dd\Pi}{dt^2} + \int \frac{\theta\,dP\,ddq'}{dt^2} + \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2} =$
$\frac{P\theta\,dd\Pi}{dt^2} + \frac{dd\Pi}{dt^2} \int s'\,dP + \theta \int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} +$
$\int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$, quantité qui devient $F \times \theta +$
$\int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2}$, en mettant pour $\frac{P\theta\,dd\Pi}{dt^2}$ sa valeur
$F \times \theta$, et observant que par la première partie du Lemme précédent, $\int s'\,dP = 0$, et par la deuxième $\int \frac{dP\,ddq'}{dt^2} = 0$. Si l'on fait les mêmes opérations sur les autres parties correspondantes de nos équations, et qu'on efface les termes qui se détruisent, on trouvera que ces équations se réduisent enfin aux suivantes :

$$F \times \alpha - D \times \varphi = \int \frac{s'\,dP\,ddq'}{dt^2} - \int \frac{q'\,dP\,dds'}{dt^2},$$

$$F \times \beta - E \times \delta = \int \frac{r'\,dP\,ddq'}{dt^2} - \int \frac{q'\,dP\,ddr'}{dt^2},$$

$$E \times \gamma - D \times \xi = \int \frac{s'\,dP\,ddr'}{dt^2} - \int \frac{r'\,dP\,dds'}{dt^2}.$$

III. Quel que puisse être le mouvement de chaque point N du corps proposé, relativement au centre

de gravité, nous pouvons toujours concevoir qu'il est produit par la rotation du corps autour des trois axes GY, GV, GT. Supposons (*Fig.* 57), qu'au premier instant le point N soit en H; et soient GE, EF, FH, les coordonnées correspondantes. Imaginons qu'en vertu de la rotation du corps autour de l'axe GY, la droite FH, en tournant parallèlement à elle-même, prenne la position SK; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GV; le point K parvienne en R; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GT, le point R parvienne en N. Les coordonnées NL, LV, GV sont ici les mêmes que dans la figure précédente. Soient tirées les droites GF, GS, DK. Du point R, soit abaissée RO perpendiculaire sur le plan TGV; et par le point O soit menée perpendiculairement à GT la droite XO qui passe nécessairement par le point L. Soient tirées les droites XR, XN. Enfin des points D et X, soient élevées perpendiculairement au plan TGV, ou parallèlement à l'axe GY, les droites DZ, XP. Supposons $GE = \psi$, $EF = \lambda$, $FH = \mu$, l'angle de rotation autour de l'axe $GY = x$, l'angle de rotation autour de l'axe $GV = y$, l'angle de rotation autour de l'axe $GT = z$.

Puisque l'angle DGS est la somme de l'angle EGF et de l'angle FGS (x), on aura $DS = GF \times \sin. DGS = \lambda \cos. x + \psi \sin. x$; $GD = GF \times \cos. DGS = \psi \cos. x - \lambda \sin. x$.

L'angle RDZ ou ORD étant la somme de l'angle KDZ ou DKS et de l'angle RDK (y), on aura DO

$= DK.\sin. RDZ = DS.\cos.y + SK.\sin.y = \lambda\cos.x\cos.y + \psi\sin.x\cos.y + \mu\sin.y$; $RO = DK \times \cos. RDZ = SK \times \cos.y - DS \times \sin.y = \mu\cos.y - \lambda\cos.x\sin.y - \psi\sin.x\sin.y$.

L'angle NXP ou XNL étant la différence de l'angle RXP ou XRO et de l'angle RXN (z), on aura $XL = XR \times \sin. NXP = XO \times \cos.z - RO \times \sin.z = \psi\cos.x\cos.z - \lambda\sin.x\cos.z - \mu\cos.y\sin.z + \lambda\cos.x\sin.y\sin.z + \psi\sin.x\sin.y\sin.z$; $LN = XR \times \cos. NXP = RO \times \cos.z + XO \times \sin.z = \mu\cos.y\cos.z - \lambda\cos.x\sin.y\cos.z - \psi\sin.x\sin.y\cos.z + \psi\cos.x\sin.z - \lambda\sin.x\sin.z$.

D'où il suit qu'à cause de $XL = GV = q'$, $DO = VL = r'$, $LN = s'$, on aura

$q' = \psi\cos.x\cos.z - \lambda\sin.x\cos.z - \mu\cos.y\sin.z + \lambda\cos.x\sin.y\sin.z + \psi\sin.x\sin.y\sin.z$;

$r' = \lambda\cos.x\cos.y + \psi\sin.x\cos.y + \mu\sin.y$;

$s' = \mu\cos.y\cos.z - \lambda\cos.x\sin.y\cos.z - \psi\sin.x\sin.y\cos.z + \psi\cos.x\sin.z - \lambda\sin.x\sin.z$.

Ainsi on pourra chasser q', r', s', ddq', ddr', dds' des équations précédentes. Il est à remarquer au sujet des trois quantités $\int s' dP ddq' - \int q' dP dds'$, $\int r' dP ddq' - \int q' dP ddr'$, $\int s' dP ddr' - \int r' dP dds'$, qui sont les mêmes respectivement que $\int dP d(s' dq' - q' ds')$, $\int dP d(r' dq' - q' dr')$, $\int dP d(s' dr' - r' ds')$, il est à remarquer, dis-je, que dans les deux différentiations successives qu'il faut faire d'abord pour trouver $d(s' dq' - q' ds')$, $d(r' dq' - q' dr')$, $d(s' dr' - r' ds')$, les angles x, y, z sont variables, et les quantités ψ, λ, μ sont

constantes; mais que dans l'intégration qui suit, il n'y a que les quatre quantités dP, ψ, λ, μ qui doivent être regardées comme variables, et que les autres doivent être écrites au-devant du signe d'intégration, parce qu'alors les intégrales expriment les mouvemens des parties du corps.

Ces formules générales servent à déterminer les mouvemens d'un corps quelconque, animé de forces quelconques. En voici l'application à notre sujet.

188. Problème. *Déterminer les mouvemens que doit prendre un corps flottant, lorsqu'ayant été d'abord un peu dérangé de la situation d'équilibre, par une cause quelconque, il est ensuite uniquement abandonné à l'action de sa pesanteur et de la poussée verticale du fluide ?*

Soient, au premier instant des mouvemens qu'il s'agit de déterminer, ABK (*Fig.* 58) une section verticale du corps flottant, par un plan qui passe par son centre de gravité G, et qui contient l'axe vertical GY et l'axe horizontal GV; HPK (*Fig.* 59) une autre section verticale, perpendiculaire à la première, qui passe aussi par le centre de gravité G, et qui contient l'axe vertical GY et l'axe horizontal GT; $MENI$ (*Fig.* 60) la section horizontale du corps, faite à fleur d'eau, et dans laquelle MN est la section commune des deux plans $MENI$, ABK; et EI est la section commune des deux plans $MENI$, HPK. Les trois axes GY, GV, GT sont ici les mêmes que dans les *Figures* 56 et 57. Faisons passer, pour plus de simplicité dans le

calcul, le plan ABK (*Fig.* 58), par le centre de gravité L du plan de flottaison $MENI$ (*Fig.* 60) : supposition toujours permise, puisque la position des axes dans l'espace est arbitraire. Le centre de gravité F (*Fig.* 61) de la partie submergée au premier instant, étant supposé placé à une certaine distance (fort petite) de la verticale GY, menons par ce centre F et par la verticale GY le plan CDK qui coupe le plan $MENI$ suivant RS. Du point F, soient menées les droites FQ, FF', l'une perpendiculaire à GY, l'autre à RS. Soit aussi menée par le point F' (*Fig.* 60), $F'f$ perpendiculaire à MN. Ici et dans la suite, les quatre *Figures* 58, 59, 60 et 61, doivent toujours être combinées ensemble; il faut se bien représenter leur position respective, et chercher dans chacune d'elles les lignes, les surfaces et les solides qu'on aura besoin de désigner.

Cela posé, il est clair que le corps en question étant soumis seulement à l'effort de sa pesanteur, et de la poussée verticale du fluide, les forces que nous avons nommées ci-dessus F et E sont ici nulles, et qu'il ne reste que la seule force D qui est la différence de la poussée verticale du fluide et de la pesanteur du corps; que par conséquent ce corps ne peut avoir aucun mouvement progressif horizontal, ou que $\Pi = 0$, $\varpi = 0$; mais qu'en vertu de la force D, son centre de gravité peut monter ou descendre (ici nous supposons qu'il monte d'une quantité égale à Oq), tandis que le

corps tourne autour des trois axes GY, GV, GT. De plus, en considérant la disposition du centre de gravité de la partie submergée, on voit qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GT, le point B s'élève, le point A s'abaisse, et la section MN du corps prend la position mn; qu'en vertu de la rotation autour de l'axe GV, le point H s'élève, le point P s'abaisse, et la section EI du corps prend la position ei. Or, durant le temps t de tous ces mouvemens, il sort de l'eau un prisme ayant $MENI$ pour base et Oq ou Oq' pour hauteur, plus les deux onglets nqc, $eq'r$; au contraire, il entre dans l'eau les deux onglets mqd, $tq'i$: sur quoi il faut observer que les deux onglets $eq'r$, $tq'i$ sont égaux, comme étant produits par la rotation des espaces MNE, MNI, autour de l'axe mn ou MN qui passe par le centre de gravité de leur système. Ce sont-là les seuls changemens qui arrivent dans la partie submergée du corps; et il est visible que le mouvement autour de l'axe vertical GY, n'y contribue en rien. Supposons que les verticales élevées par les centres de gravité des quatre onglets nqc, mqd, $eq'r$, $tq'i$, rencontrent le plan $MENI$, aux points g, z, l, s, respectivement; et soient menées les droites gh, zk, lp, su perpendiculaires à MN. Nommons :

La pesanteur spécifique du corps.............. p,
Celle du fluide.............................. ϖ,
Le volume entier du corps.................... M,
Celui de la partie plongée au premier instant... N,

L'aire $MENI$ . . . . a^2,
La distance OL de son centre de gravité L au point O . . . . b,
La hauteur GQ (*Fig.* 61), du centre de gravité de la partie submergée, au-dessus de celui G du corps . . . . h,
Of (*Fig.* 60) . . . . δ,
$F'f$ . . . . δ';
Oq (*Fig.* 58) . . . . θ,
L'angle de rotation autour de l'axe vertical GY. . . . x,
L'angle de rotation autour de l'axe horizontal GV. . . . y,
L'angle de rotation autour de l'axe horizontal GT. . . . z,
L'onglet $eq'r$ ou $tq'i$ . . . . $i^3 y$,
Op . . . . k,
lp . . . . k',
Ou . . . . n,
su . . . . n',
L'onglet nqc . . . . $c^3 z$,
Oh . . . . e,
gh . . . . e',
L'onglet mqd . . . . $f^3 z$,
Ok . . . . g,
zk . . . . g',

Je n'ai pas besoin d'avertir que les quantités a, b, c, f, g, g', h, i, k, k', e, e' δ, δ' sont données ou déterminables par la Géométrie.

On aura d'abord, $D = \varpi \times (N - MENI \times Oq - nqc + mqd - eq'r + iq't) - p \times M = \varpi (N - MENI \times Oq - nqc + mqd) - p \times M = \varpi N - \varpi a^2 \theta - \varpi c^3 z + \varpi f^3 z - p M$.

De plus, si l'on considère qu'en vertu de l'inclinaison du corps vers A, le centre de gravité F

s'approche du plan HPK de la quantité hz, ou que Of devient $\delta - hz$, et qu'en vertu de l'inclinaison vers P, le même point F s'approche du plan ABK de la quantité hy ou que Ff devient $\delta' - hy$; on verra sans peine qu'après le temps t le moment de la poussée verticale du fluide, par rapport à l'axe GT, ou $D \times \phi = \varpi [N(\delta - hz) + a^2 b \theta - c^3 e z - f^3 g z - i^3 k y - i^3 n y]$, et que le moment de la même force, par rapport à l'axe GV, ou $D \times \xi = - \varpi [N(\delta' - hy) + c^3 e' z + f^3 g' z - i^3 k' y - i^3 n' y]$.

Reste à trouver les valeurs de $\int dPd(s'dq' - q'ds')$, $\int dPd(r'dq' - q'dr')$, $\int dPd(s'dr' - r'ds')$ en fonctions des angles x, y, z.

Comme les oscillations sont censées fort petites, il est clair que dans les valeurs de q', r', s' trouvées ci-dessus, on pourra négliger tous les termes qui contiennent plus d'un sinus, supposer dans les termes qui contiennent un sinus et un cosinus ou deux cosinus, chaque cosinus $= 1$, et prendre l'angle pour le sinus. Donc

$s'dq' - q'ds' = - \lambda\mu dx - (\mu^2 + \psi^2) dz + \psi\lambda dy$,
$r'dq' - q'dr' = - (\psi^2 + \lambda^2) dx - \lambda\mu dz - \psi\mu dy$,
$s'dr' - r'ds' = \psi\mu dx + (\lambda^2 + \mu^2) dy - \psi\lambda dz$;
$\int dPd(s'dq' - q'ds') = - pddx \int \lambda\mu dM - pddz \int (\mu^2 + \psi^2) dM + pddy \int \psi\lambda dM$,
$\int dPd(r'dq' - q'dr') = - pddx \int (\psi^2 + \lambda^2) dM - pddz \int \lambda\mu dM - pddy \int \psi\mu dM$,
$\int dPd(s'dr' - r'ds') = pddx \int \psi\mu dM + pddy \int (\lambda^2 + \mu^2) dM - pddz \int \psi\lambda dM$:

quantités

quantités dans lesquelles les parties comprises sous le signe d'intégration sont données par la figure du corps. Nous ferons pour abréger, $\int \lambda \mu \, d M = \mathcal{A}$, $\int (\mu^2 + \psi^2) \, d M = B$, $\int \psi \lambda \, d M = C$, $\int (\psi^2 + \lambda^2) \, d M = G$, $\int \psi \mu \, d M = H$, $\int (\lambda^2 + \mu^2) \, d M = K$.

Il résulte de tout ce qui précède, qu'on aura les quatre équations suivantes qui expriment en général toutes les oscillations (très-petites), dont un corps flottant peut être affecté :

$$[\varpi N - \varpi a^2 \theta - (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - p M] \, d t^2 \qquad (A)$$
$$= p M d d \theta,$$

$$- \varpi [N (\delta - h z) + a^2 b \theta - (c^3 e + f^3 g) z \qquad (B)$$
$$- (i^3 k + i^3 n) y] \, d t^2 = - p \mathcal{A} d d x - p B d d z$$
$$+ p C d d y,$$

$$p G d d x + p \mathcal{A} d d z + p H d d y = 0, \qquad (C)$$

$$\varpi [N (\delta' - h y) + (c^3 e' + f^3 g') z - (i^3 k' \qquad (D)$$
$$+ i^3 n') y] \, d t^2 = p H d d x + p K d d y - p C d d z.$$

Comme les quatre variables θ, x, y, z ne sont qu'au premier degré dans les équations (A), (B), (C), (D), ces équations combinées ensemble s'intègrent facilement par les méthodes que d'Alembert a données dans les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1748 et 1750. Je ne ferai pas ici en général ce calcul, qui n'a d'autre difficulté que sa longueur. Je me borne à l'examen de quelques cas particuliers.

189. *Corollaire I.* Supposons, comme il arrive dans les oscillations des vaisseaux flottans à la mer, que le plan $\mathcal{A} B K$ partage le corps flottant en

deux parties exactement égales, et que les centres de gravité des deux onglets $e q' r$, $i q' t$ se trouvent, du moins à-peu-près dans le plan HPK, on aura rigoureusement $e' = 0$, $g' = 0$; et dans l'équation (B) on pourra négliger les termes $i^3 k y$, $i^3 n y$, comme incomparablement plus petits que les autres. De plus, on aura, par la propriété du centre de gravité, $\int \lambda \mu \, d M = 0$, $\int \psi \lambda \, d M = 0$. Ainsi nos équations se changeront en celles-ci,

(E) $[\varpi N - \varpi a^2 \theta + (\varpi c^3 - \varpi f^3) z - p M] d t^2 = p M d d \theta$,

(F) $\varpi [N(\delta - h z) + a^2 b \theta - (c^3 e + f^3 g) z] d t^2 = p B d d z$,

(G) $G d d x + H d d y = 0$,

(H) $\varpi [N(\delta' - h y) - 2 i^3 k' y] d t^2 = p H d d x + p K d d y$,

résultats qui reviennent à ceux que j'ai trouvés un peu différemment dans les deux pièces citées.

Comme on peut mettre dans la dernière équation, à la place de $p H d d x$ sa valeur $-\frac{p H^2 d d y}{G}$, et que H est une quantité dont le carré, tout au moins, peut être traité comme infiniment petit du premier ordre, on pourra négliger le terme $-\frac{p H^2 d d y}{G}$. Soient pour abréger le calcul,

$$\frac{\varpi N - p M}{p M} = I, \frac{\varpi a^2}{p M} = L, \frac{\varpi c^3 - \varpi f^3}{p M} = P,$$

$$\frac{\varpi N \delta}{p B} = Q, - \frac{\varpi a^2 b}{p B} = R,$$

$$\frac{\varpi(Nh + c^5 e + f^5 g)}{pB} = S,\quad \frac{\varpi N s'}{pK} = T,$$

$\frac{\varpi(Nh + 2 i^5 k')}{pK} = V$. Nos quatre équations deviennent

$$d d\theta - I dt^2 + L\theta dt^2 + P z dt^2 = 0,$$
$$d dz - Q dt^2 + R\theta dt^2 + S z dt^2 = 0,$$
$$G d dx + H d dy = 0,$$
$$d dy - T dt^2 + V y dt^2 = 0.$$

Les deux premières combinées ensemble s'intègrent de la manière suivante, par l'ingénieuse méthode de d'Alembert. Ayant multiplié la première par un coéfficient idéterminé ν, je l'ajoute à la seconde; ce qui donne $\nu d d\theta - \nu I dt^2 + \nu L\theta dt^2 + \nu P z dt^2 + d dz - Q dt^2 + R\theta dt^2 + S z dt^2 = 0$. Ensuite je suppose que l'on ait l'équation $\nu L\theta + \nu P z + R\theta + S z = \iota(\nu\theta + z)$., ι étant un coéfficient indéterminé; ce qui donne, en comparant ensemble les termes de même espèce, ces deux équations $\nu L + R = \iota\nu$, $\nu P + S = \iota$. D'où l'on tire deux valeurs de ν que je nomme ν et ν', et deux valeurs de ι que je nomme ι et ι'. Soient $\nu\theta + z = s$, $\nu'\theta + z = s'$: l'équation $\nu d d\theta - \nu I dt^2 +$ etc. donnera ces deux autres

$$d ds + \iota s dt^2 - (\nu I + Q) dt^2 = 0,$$
$$d ds' + \iota' s' dt^2 - (\nu' I + Q) dt^2 = 0.$$

Multipliant la première par ds, la seconde par ds', ensuite intégrant deux fois, on trouvera facilement

$$s = \left(\frac{\nu I + Q}{\varepsilon}\right) \times (1 - \cos. t\sqrt{\varepsilon}),$$

$$s' = \left(\frac{\nu' I + Q}{\varepsilon'}\right) \times (1 - \cos. t\sqrt{\varepsilon'});$$

et par conséquent

$$\theta = \frac{(\nu I + Q).}{\varepsilon(\nu - \nu')} . (1 \cos. t\sqrt{\varepsilon})$$

$$- \frac{(\nu' I - Q)}{\varepsilon'(\nu - \nu')} . (1 - \cos. t\sqrt{\varepsilon'}),$$

$$z = \frac{(\nu' I + Q)\nu}{\varepsilon'(\nu - \nu')} (- \cos. t\sqrt{\varepsilon'})$$

$$- \frac{(\nu I + Q)\nu'}{\varepsilon(\nu - \nu')} (1 - \cos. t\sqrt{\varepsilon}).$$

Ces valeurs de θ et de z sont complètes, parce qu'on doit avoir $\theta = 0$ et $z = 0$, lorsque $t = 0$, et que $t = 0$ donne $\cos. t\sqrt{\varepsilon} = 1$, $\cos. t\sqrt{\varepsilon'} = 1$.

Quant aux deux dernières équations fondamentales $G\,d\,d\,x + H\,d\,d\,y = 0$, $d\,d\,y - T\,d\,t^2 + V y\,d\,t^2 = 0$, elles s'intègrent tout de suite, et donnent :

$$y = \frac{T}{V} (1 - \cos. t\sqrt{V}),$$

$$x = - \frac{H.T}{G.V} (1 - \cos. t\sqrt{V}).$$

190. *Corollaire II.* Il est évident, par les expressions que nous venons de trouver pour θ et z, que si ε et ε' sont des quantités réelles et positives, le mouvement θ du centre de gravité et celui de rotation z autour de l'axe GT sont très-petits, comme on les a supposés, et que par conséquent le corps fera des oscillations qui ne l'exposeront pas à verser. Mais

si ϵ et ϵ' étoient des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de θ et de z dépendroient des logarithmes, et qu'ainsi t augmentant, elles augmenteroient. D'où il suit que les oscillations ne seroient plus infiniment petites, comme on les a supposées, et que le corps n'auroit pas de stabilité, ou seroit exposé à verser. On trouve pareillement que les valeurs de θ et de z contiennent des logarithmes, lorsque v et v', et par conséquent aussi ϵ et ϵ' sont imaginaires, ou lorsque v et v' étant des quantités réelles, ces deux quantités sont égales entr'elles. Mais ces deux derniers cas sont purement géométriques, et n'ont pas lieu dans notre problème.

Pareillement, les valeurs de y et de x seront infiniment petites, lorsque V sera une quantité positive; mais si V étoit une quantité négative, le corps n'auroit pas de stabilité par rapport aux deux axes GV, GY, et finiroit par verser.

On voit que les conditions de stabilité dont je viens de parler, dépendent de la position du centre de gravité du corps entier, par rapport à celui de sa partie submergée. Toutes les fois que le premier point est placé plus bas que le second, le corps flottant a de la stabilité en tout sens; mais si au contraire le premier point est placé plus haut que le second, ce corps pourra manquer de stabilité; nos formules font connoître la plus grande hauteur qu'on puisse mettre alors entre les deux centres de gravité. Cette manière de déterminer les *métacentres* est générale et fort simple.

191. *Corollaire III.* Lorsque la verticale GY passe par le centre de gravité du plan de flottaison, et que les deux plans ABK, HPK partagent chacun le corps en deux parties égales et semblables, les deux onglets nqc, mqd sont égaux, de même que les deux onglets $eq'r$, $iq't$. De plus, on a $\int \lambda\mu dM$ ou $A = 0$, $\int \psi\lambda dM$ ou $C = 0$, $\int \psi\mu dM$ ou $H = 0$. Par conséquent, si l'on suppose qu'au premier instant le poids du fluide déplacé soit égal au poids absolu du corps, ou qu'on ait $\varpi N = pM$, le corps ne pourra ni monter ni descendre, et on aura $\theta = 0$. On aura aussi $x = 0$, abstraction faite de tout mouvement de rotation horizontale, primitivement imprimé. Nos quatre équations fondamentales de l'article 189 se réduiront donc au deux suivantes,

$$ddz - Qdt^2 + Szdt^2 = 0,$$
$$ddy - Tdt^2 + Vydt^2 = 0,$$

lesquelles donnent

$$z = \frac{Q}{S}(1 - \cos. t\sqrt{S});$$
$$y = \frac{T}{V}(1 - \cos. t\sqrt{V}).$$

Le corps proposé a donc alors simplement deux mouvemens de rotation qui se font autour des deux axes horizontaux GT, GV, passant par son centre de gravité et perpendiculaires entr'eux. Ces oscillations demeurent toujours fort petites, et par conséquent le corps a de la stabilité, lorsque S et V sont des quantités positives. Elles sont absolument de même espèce que celles d'un pendule qui va

et vient; et en nommant Z, Y leurs amplitudes totales, on a évidemment $Z = \frac{2Q}{S}$, $Y = \frac{2T}{V}$.

A l'égard des temps employés à parcourir les angles Z, Y, ils sont faciles à trouver. Car pour que z devienne Z, et que y devienne Y, il faut que l'on ait $1 - \cos. t\sqrt{S} = 2$, $1 - \cos. t\sqrt{V} = 2$, ou bien $\cos. t\sqrt{S} = -1$, $\cos. t\sqrt{V} = -1$, et par conséquent $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{S}}$, $t = \frac{180^\circ}{\sqrt{V}}$. Substituant à la place de S et V leurs valeurs, on trouvera que le temps de chaque oscillations Z, est exprimé par $180^\circ \times \sqrt{\left[-\frac{\int p(\psi^2+\mu^2)\,dM}{\pi(Nh+2c^3e)}\right]}$, et que de même celui de chaque oscillation Y, est exprimé par $180^\circ \times \sqrt{\left[-\frac{\int p(\lambda^2+\mu^2)\,dM}{\pi(Nh+2i^3k')}\right]}$. Or, comme ces valeurs ne contiennent point les distances initiales δ, δ' du centre de gravité de la partie submergée aux plans HPK, ABK, il est clair que les oscillations seront isochrones dans chaque espèce, quelles que soient leurs amplitudes totales, pourvu néanmoins qu'elles soient toujours fort petites. Le corps oscille donc à la manière des pendules. Pour déterminer les longueurs des pendules synchrones aux oscillations de ce corps, on remarquera que si un pendule simple, dont la longueur est L, est distant, au premier instant, de la verticale, de la quantité δ, fort petite, et décrit dans le temps t

l'angle u qui a L pour rayon ; l'équation de ce pendule est $d\,d\,u = \frac{(\delta - u)\,d\,t^2}{L}$; ou bien $u = \delta\left(1 - \cos.\ \frac{t}{\sqrt{L}}\right)$. D'où l'on tire le temps d'une oscillation entière $= 180° \times \sqrt{L}$. Ainsi, la longueur du pendule synchrone aux oscillations Z est donnée par l'équation

$$L = \frac{\int p\,(\psi^2 + \mu^2)\,d\,M}{\varpi\,(N\,h + 2\,c^3\,e)},$$

et celle du pendule synchrone aux oscillations Y est donnée par l'équation

$$L' = \frac{\int p\,(\lambda^2 + \mu^2)\,d\,M}{\varpi\,(N\,h + 2\,i^3\,k')}.$$

192. *Scholie.* Je terminerai ces recherches par l'application des formules de l'article précédent à un exemple particulier.

Soit le corps flottant (*Fig.* 62) un demi-sphéroïde elliptique $AKBPAH$ homogène, produit par la demi-révolution de la demi-ellipse $A\,H\,B$ autour de son axe $A\,B$. Le plan $A\,H\,B\,P$ qui sert de base au demi-sphéroïde, et le plan de flottaison $MENI$, sont parallèles et distans l'un de l'autre d'une quantité donnée $Z\,O$. Le point G est le centre de gravité du demi-sphéroïde, et les trois axes $G\,Y$, $G\,V$, $G\,T$, sont les mêmes que ci-dessus. $A\,B\,K$ est la section longitudinale du corps, HPK la section latudinale. Il s'agit de trouver ici les valeurs des quantités N, h, $c^3\,e$, $i^3\,k'$, $\int(\psi^2 + \mu^2)\,dM$, $\int(\lambda^2 + \mu^2)\,dM$. Cherchons-les par ordre.

1°. Pour éviter la multiplicité et la confusion des lignes, considérons $MENI$ comme une section indéterminée du demi-ellipsoïde. Ayant mené à l'axe MN de la courbe $MENI$ l'ordonnée quelconque CD, qu'on fasse passer par cette ordonnée le plan vertical $SCXCL$ qui coupe le plan vertical ABK suivant XR. On voit que CD sera aussi l'ordonnée d'un cercle dont RX est le rayon. Ainsi $(CD)^2 = (XR)^2 - (DR)^2$. Mais par la propriété de l'ellipse, $(XR)^2 = [(BZ)^2 - (RZ)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$ $= [(BZ)^2 - (DO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$, et $(DR)^2$ $= [(BZ)^2 - (NO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}$. Donc

$$(CD)^2 = [(NO)^2 - (DO)^2] \times \frac{(ZP)^2}{(BZ)^2}.$$

D'où l'on voit que la courbe $MENI$ est une ellipse semblable à l'ellipse $AHBP$. Soient $BZ = a$, ZP ou $ZK = b$, $ZO = x$, le rapport de la circonférence au diamètre $= n$. On aura $AHBP = nab$, $MENI = nab \times \frac{(NO)^2}{(BZ)^2}$ $= \frac{na(bb-xx)}{b}$. Donc $dN = -\frac{nadx(bb-xx)}{b}$ et $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2x + \frac{x^3}{3}\right)$, en complétant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $x = b$. Faisons $x = ZO = f$, ligne connue; nous aurons la quantité que nous

cherçons $N = \frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2 f + \frac{f^3}{3}\right)$. En supposant $f = 0$, N devient ce que nous avons appelé M; et on a par conséquent $M = \frac{2nab^2}{2}$.

2°. Le moment élémentaire du solide $MKNIME$, par rapport au point Z, est $-\frac{naxdx(bb - xx)}{b}$, dont l'intégrale complète est $\frac{na}{b}\left(\frac{b^4}{4} - \frac{b^2x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)$. Faisons d'abord $x = 0$, et divisons par M ou $\frac{2nab^2}{4}$; nous aurons la distance du centre de gravité du solide $AKBPAH$ au point Z, $= \frac{3}{8}b$. Faisons ensuite $x = f$, et divisons par N ou $\frac{na}{b}\left(\frac{2}{3}b^3 - b^2 f + \frac{f^3}{3}\right)$; nous aurons la distance du centre de gravité de la partie submergée, au point Z, $= \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$. Ainsi, $h = \frac{3}{8}b - \frac{3(b^4 - 2b^2f^2 + f^4)}{4(2b^3 - 3b^2f + f^3)}$.

3°. Imaginons que l'onglet formé par la rotation de l'aire EIN autour de EI, est composé d'une infinité de triangles prs perpendiculaires à l'axe EI. En faisant, pour une moment, $OI = l$, $ON = m$, $Op = u$; il est clair que $pr = \frac{m}{l}\sqrt{[ll - uu]}$, et que le moment élémentaire du demi-onglet

$= \frac{m^2}{l^2}(ll - uu) \times \frac{m\sqrt{[ll-uu]}}{3l} \times du \times z$
$= \frac{m^3 z}{3 l^3} \times du\,(ll - uu)^{\frac{3}{2}}$, dont l'intégrale est
$\frac{m^3 z}{3 l^3} \times \left(\frac{u(ll-uu)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3}{4} l^2 \int du \sqrt{[ll-uu]}\right)$.
Faisant $u = l$, considérant qu'alors $\int du \sqrt{[ll-uu]}$ représente l'aire d'un quart-de-cercle dont le rayon est l, et doublant l'intégrale, on trouvera que la quantité exprimée par $c^3 e, = \frac{n m^3 l}{8}$. Mettons pour m sa valeur $\frac{a}{b}\sqrt{[bb - ff]}$, pour l sa valeur $\sqrt{[bb - ff]}$; nous aurons $c^3 e = \frac{n a^3 (bb - ff)^2}{b^3}$.

4°. On trouvera de la même manière que la quantité exprimée par $i^3 k'$, vaut $\frac{n a (bb - ff)^2}{8 b}$.

5°. Pour déterminer $\int(\psi^2 + \mu^2)\, dM$ ou la somme des produits des particules du demi-ellipsoïde par les carrés de leurs distances à l'axe latitudinal GT, je considère, ainsi que je l'ai déjà fait, $MENI$ comme une section indéterminée du demi-sphéroïde. Sur l'ordonnée CD à l'axe MN, je prends les deux points quelconques infiniment voisins f, u. Ayant supposé $ZO = x$, OM ou $ON = m$, $OD = q$, $Df = s$, et nous rappelant que $ZG = \frac{3}{8} b$, on verra sans peine que le produit de l'élément fu par le carré de sa distance à l'axe GT est représenté par

$ds\left[qq+\left(\frac{3}{8}b-x\right)^2\right]$, quantité dans laquelle il n'y a que s de variable. Intégrant et faisant ensuite $s=DC=\frac{b}{a}\sqrt{[m^2-q^2]}$, on a $\left[qq+\left(\frac{3}{8}b-x\right)^2\right]\times\frac{b}{a}\sqrt{[m^2-q^2]}$ pour la somme des produits de tous les points de DC par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Multipliant cette somme par dq, intégrant en ne faisant varier que q, on trouvera $\frac{b}{a}\left(\left[\frac{m^2}{4}+\left(\frac{3}{8}b-x\right)^2\right]\int dq\sqrt{[m^2-q^2]}-\frac{q(mm-qq)^{\frac{3}{2}}}{4}\right)$ pour la somme des produits de tous les points de l'aire elliptique $CDOE$ par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Faisant $q=m=\frac{a}{b}\sqrt{[bb-xx]}$; considérant qu'alors $\int dq\sqrt{[m^2-q^2]}=\frac{n\,.\,m^2}{4}=\frac{na^2(bb-xx)}{4b^2}$; et quadruplant l'intégrale : il nous viendra $\frac{nb}{a}\times\left[\frac{a^4(bb-xx)^2}{4b^4}+\frac{a^2(bb-xx)}{b^2}\left(\frac{3}{8}b-x\right)^2\right]$ pour la somme des produits de tous les points de l'ellipse entière $MENI$, par les carrés de leurs distances à l'axe GT. Enfin, multipliant par dx, intégrant en ne faisant varier que x, faisant ensuite $x=b$, on aura $\int(\psi^2+\mu^2)dM=\frac{n(64a^3b^2+19ab^4)}{480}$.

6°. On trouvera de la même manière la somme

des produits des particules du demi-ellipsoïde par les carrés de leurs distances à l'axe longitudinal GV, ou $\int(\lambda^2+\mu^2)\,dM = \frac{83\,n\,a\,b^4}{480}$.

Il suit de tous ces détails qu'en faisant, pour abréger un peu, $2\,b^3 - 3\,b^2 f + f^3 = \alpha^3$, $aa - bb = \beta^2$, $bb - ff = \gamma^2$, on aura

$$Z = \frac{16\,b^2\,\alpha^3\,\delta}{3\,(b^3\alpha^3 + 2\,\beta^2\,\gamma^4)}\,;\quad Y = \frac{16\,\delta^2}{3\,b}\,;$$

$$L = \frac{(64\,a^2\,b^5 + 19\,b^7)\,p}{60\,\varpi\,(b^3\,\alpha^3 + 2\,\beta^2\,\gamma^4)}\,;\quad L' = \frac{83\,p\,b^4}{60\,\varpi\,\alpha^3}.$$

On peut tirer de ces formules plusieurs conséquences intéressantes, comme, par exemple, les dimensions du sphéroïde, les plus propres à lui procurer des oscillations douces, par la combinaison la plus avantageuse de leur amplitude avec leur durée; matière curieuse en elle-même, et qui peut avoir des applications fort utiles dans l'arrimage des vaisseaux. Mais ces discussions nous meneroient trop loin. Voyez mes deux pièces *sur l'arrimage des vaisseaux.*



CHAPITRE XV.

De la Figure de la Terre, en tant qu'elle peut dépendre des loix de l'Hydrostatique.

193. LA Terre paroît former, dans sa plus grande partie, une masse solide. Mais lorsque l'on considère d'un côté la vaste étendue des mers, leur profondeur, leur communication universelle et réciproque, la quantité de rivières qui sillonnent la surface du globe; et lorsque d'un autre côté, en pénétrant dans son intérieur, on y trouve les corps ou les débris de productions maritimes de toute espèce : on est fortement porté à penser que la Terre étoit originairement une masse fluide qui s'est consolidée en partie par la succession des temps, et qui, pour arriver à cet état, a dû prendre la forme que demandoient les loix de l'équilibre des fluides. En considérant donc la Terre sous ce point de vue, sa figure est déterminable par les principes de l'Hydrostatique, comme nous allons le faire voir.

Nous appellerons *pesanteurs*, des forces qui sont en effet de la même nature que la gravité dans l'hypothèse de Galilée, mais qui peuvent être d'ailleurs constantes ou variables, soit en quantités, soit en directions.

194. Huguens et Newton sont les premiers qui

aient entrepris de résoudre le problème dont il s'agit; leurs solutions méritent d'être connues, quoiqu'elles ne soient plus aujourd'hui que de très-petites branches de cette théorie qui a fait des progrès considérables. Huguens prend pour base, que *si une masse fluide pesante dans tous ses points est en équilibre, sa surface doit couper perpendiculairement les directions des pesanteurs des particules qui y sont placées* : Newton, que *si une masse fluide pesante est en équilibre, deux colonnes quelconques menées à un même point fixe, considéré comme centre, se contrebalancent mutuellement et indépendamment du reste de la masse.* Voici la manière d'appliquer l'un et l'autre principe à la recherche de la figure de la Terre.

195. Problème I. *La Terre supposée fluide, ayant la forme d'un solide de révolution, et chacun de ses points étant soumis à l'action d'une pesanteur donnée et de la force centrifuge : trouver sa figure ?*

SOLUTION PAR LE PRINCIPE DE HUGUENS.

Soient (*Fig.* 63), C le centre de la Terre, $DAEB$ l'un de ses méridiens, ou la section de cette planète par un plan qui passe par l'axe de révolution DE. Que la pesanteur au point M ait la direction quelconque MO; représentons cette force par MF, et décomposons-la en deux autres MH, MK, perpendiculaires aux deux axes DE, AB du méridien. La force centrifuge du point M

qui circule autour de DE, est proportionnelle, comme on sait, à l'ordonnée MP : je représente par HI cette force qui agit en sens contraire de la force MH. Alors, on voit que le point M est animé par les deux forces MI, MK; d'où résulte la force composée MV, laquelle doit être perpendiculaire à l'élément Mm du méridien. Supposons $CP = x$; $PM = y$; Force $MF = \phi$; l'angle OMP, pour le rayon $1, = z$; et nommons f la force centrifuge *donnée* pour une distance *donnée* k. On aura, Force $MH = \phi \cos. z$; Force $MK = \phi \sin. z$; Force $HI = \frac{fy}{k}$; Force $MI = \phi \cos. z - \frac{fy}{k}$. Maintenant, en mettant l'ordonnée mp, les triangles rectangles semblables Mrm, VKM, donneront, $Mr\ (-dx) : rm\ (dy) :: KV \left(\phi \cos. z - \frac{fy}{k}\right) : MK\ (\phi \sin. z)$; d'où l'on tire, pour l'équation du méridien,

$$\left(\phi \cos. z - \frac{fy}{k}\right) dy = -\phi \sin. z \,.\, dx.$$

SOLUTION PAR LE PRINCIPE DE NEWTON.

Soient (*Fig.* 64) $DAEB$ le méridien; DE l'axe de révolution; C le centre de la Terre, où tendent la colonne polaire DC et la colonne quelconque MC, lesquelles doivent se faire mutuellement équilibre. Prenons sur CM le point quelconque R, dont la pesanteur est dirigée suivant RO, et que je représente par Rt; décomposons cette force en deux autres Rh, Ri, l'une dirigée suivant MC, l'autre

l'autre perpendiculaire à MC. Représentons par Rz la force centrifuge du point R, laquelle agit dans le sens QR, perpendiculairement à l'axe de révolution DE; et décomposons-là en deux autres Rs, Ru, l'une dirigée suivant CM, l'autre perpendiculaire à CM. Il est évident que les forces Ri, Ru, ne contribuent en rien au poids du canal RC dans le sens MC, et qu'il ne faut avoir égard qu'aux forces Rh, Rs. Supposons l'abscisse $CP = x$; l'ordonnée $PM = y$; l'angle $CRO = p$; $CR = r$; $RQ = u$; Force $Rt = \phi$; la force centrifuge $= f$, pour la distance k. On aura, Force $Rh = \phi \cos. p$; Force $Rz = \frac{fu}{k}$; Force $Rs = \frac{fu^2}{kr}$. Donc la pression du canal RC sur le point C, est $\int dr \left(\phi \cos. p - \frac{fu^2}{kr}\right)$, ou $\int dr \left[\phi \cos. p - \frac{fy^2 r}{k(xx+yy)}\right]$, intégrale qu'il faut prendre, en regardant x et y comme constantes; ensuite, pour avoir le poids du canal entier MC, il faudra faire $r = CM = \sqrt{(xx+yy)}$; ce qui donnera une expression qu'on égalera au poids connu de la colonne DC.

196. *Corollaire.* Supposons, pour faire une application très-simple de ce problême, que la pesanteur ϕ soit constante et dirigée au centre C de la Terre (*Fig.* 63 *et* 64). On aura (*Fig.* 63), sin. $z = \frac{x}{\sqrt{(xx+yy)}}$, cos. $z = \frac{y}{\sqrt{(xx+yy)}}$; et l'équation du méridien, trouvée par le principe de

Huguens, deviendra $\frac{\varphi y\,dy}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{fy\,dy}{k}$ $= - \frac{\varphi x\,dx}{\sqrt{(xx+yy)}}$, ou $\frac{\varphi(x\,dx+y\,dy)}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{fy\,dy}{k} = 0$, dont l'intégrale est $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k} = A$. La constante A doit être telle qu'en faisant $y=0$, on ait $x=CD$, quantité donnée.

Dans la *Figure* 64, on a $p=0$, et la quantité $\int dr\left(\varphi\cos.p - \frac{fy^2 r}{k(xx+yy)}\right)$ devient d'abord, $\varphi r - \frac{fy^2 r^2}{2k(xx+yy)}$. Faisant $r = CM = \sqrt{(xx+yy)}$, on a $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k}$, pour tout le poids de la colonne CM, lequel doit être égal au poids connu de la colonne DC; d'où l'on tire, comme tout-à-l'heure, $\varphi\sqrt{(xx+yy)} - \frac{fy^2}{2k} = A$, pour l'équation du méridien.

197. *Remarque I.* Les principes de Huguens et de Newton, qui nous ont donné la même équation pour le méridien dans l'hypothèse du corollaire précédent, donnent également les mêmes équations dans plusieurs autres hypothèses de pesanteurs. Mais il y a des cas où les résultats sont différens. Le principe de Huguens établit l'équilibre à la surface du fluide; celui de Newton l'établit dans l'intérieur par rapport au centre; mais ces deux condi-

tions ne sont pas suffisantes séparément, ni même en certains cas, conjointement, pour établir l'équilibre dans tous les points de la masse. Voyez *les Mém. de l'Acad. pour l'année* 1734, et le *Traité de la figure de la Terre* de Clairaut, *page* 31.

198. *Remarque II.* L'équilibre a lieu dans tous les points de la masse, lorsqu'en y prenant un point quelconque (et non pas seulement un point fixe et déterminé, comme a fait Newton), on trouve que ce point est en équilibre, ou qu'il est également pressé en toutes sortes de sens. De ce principe général que Maclaurin a developpé clairement, le premier, il suit :

1°. Que dans toute masse fluide OAN (*Fig.*-65), soumise à des forces quelconques et en équilibre, le canal angulaire OMN, terminé de part et d'autre à la surface, est séparément en équilibre. Car la masse entière étant en équilibre, la particule M est également pressée dans tous les sens ; et cette égalité de pression demeurera la même, si l'on conçoit que le canal OMN demeure seul fluide, le reste de la masse étant supposé se durcir.

2°. Que le canal triangulaire OMR, dont un angle O est la à surface du fluide, est en équilibre. Car si l'on prolonge MR jusqu'à la surface du fluide, les deux canaux angulaires OMN, ORN sont chacun séparément en équilibre. Donc *

* Je désigne, pour abréger, la pression d'une colonne par la lettre initiale P, écrite en avant.

$P.OM = P.NM$, et $P.OR = P.NR$. Or, $P.NM = P.NR + P.RM = P.OR + P.RM$; donc $P.OM = P.OR + P.RM$; c'est-à-dire, que le point M souffre une égale pression de la part de la colonne OM et de la part des deux colonnes OR, RM, qui agissent sur ce point de la même manière que si elles étoient placées en ligne droite. Donc il ne peut y avoir de mouvement dans le canal OMR, ni dans le sens OMR, ni dans le sens ORM; et par conséquent ce canal est en équilibre.

3°. Que le canal triangulaire MRQ, pris dans l'intérieur de la masse est en équilibre. Car si l'on prolonge MR, MQ, QR jusqu'à la surface du fluide, les trois canaux OMN, OQZ, NRZ, seront en équilibre, comme on l'a vu n°. 1. Donc $P.OM = P.NM$, ou $P.OQ + P.QM = P.NR + P.RM$; et $P.OQ = P.RQ + P.ZR$, ou $P.OQ = P.RQ + P.NR$. Substituant cette valeur de $P.OQ$, dans l'équation précédente, il viendra $P.QM + P.RQ = P.RM$. Ainsi, la somme des pressions des colonnes QM, RQ, sur le point M, est égale à la pression de la colonne RM sur ce même point; et par conséquent le canal QMR est en équilibre.

4°. Que le canal $OMRQN$ (*Fig.* 66), de figure quelconque, rectiligne ou curviligne, terminé de part et d'autre à la surface du fluide, est en équilibre. Car si l'on mène les diagonales OR, OQ, tous les canaux OMR, ORQ, OQN seront en équilibre. Donc $P.OM = P.RM$

$+P.OR$; $P.OR = P.QR + P.OQ$; $P.OQ = P.NQ$. Ainsi $P.OM = P.RM + P.QR + P.NQ$; c'est-à-dire, que la pression de la colonne OM sur le point M, est égale à la somme des pressions des colonnes RM, QR, NQ, sur ce même point; d'où résulte l'équilibre du canal $OMRQN$. Cette conclusion a toujours lieu, même dans le cas où tous les côtés du polygone ou de la courbe $OMRQN$, ne seroient pas situés dans un même plan.

5°. Que le canal $MRQTV$ (*Fig.* 67), de figure quelconque, rentrant en lui-même, pris dans l'intérieur du fluide, est en équilibre. Car si l'on mène les diagonales MQ, MT, on verra que tous les canaux triangulaires MRQ, MQT, MTV, étant en équilibre, la pression de la colonne RM sur le point M, est égale à la somme des pressions des colonnes RQ, QT, TV, VM, sur ce même point; d'où résulte l'équilibre dans le canal $MRQTV$, quels que soient le nombre et la position de ses côtés.

199. *Remarque III.* On voit que le principe de Newton, ou l'équilibre de deux colonnes centrales, n'est qu'un cas particulier du n°. 1 de l'article précédent; et que celui de Huguens, ou la perpendicularité de la pesanteur à la surface du fluide, aura lieu lorsque le n°. 4 du même article sera vérifié, c'est-à-dire, quand un canal de figure quelconque, terminé de part et d'autre à la surface du fluide, sera en équilibre : car on peut concevoir que ce canal est couché immédiatement à la surface du

fluide, qu'il est, par exemple, OKN (*Fig.* 66); et alors l'état d'équilibre demande nécessairement que la pesanteur soit perpendiculaire en chacun des points de ce canal, sans quoi il y auroit un courant dans le sens $OKNA$, ou dans le sens contraire $NKOA$.

200. *Remarque IV.* Les Géomètres, et en particulier Maclaurin et Clairaut, ont fait un grand usage de ces propriétés des canaux, pour reconnoître l'équilibre de la Terre et pour déterminer sa figure dans différentes hypothèses de pesanteurs.

Lorsque la pesanteur primitive est dirigée vers un point fixe, quelle que soit d'ailleurs la loi de cette force, l'équation du méridien de la Terre considérée toujours comme un solide de révolution, peut se trouver immédiatement et d'une manière fort simple par le principe d'égalité de pression, comme on le va voir.

201. Problème II. *La masse fluide* ADBE (Fig. 68), *tournant autour de l'axe* DE, *et chacun de ses points étant soumis à l'action de la force centrifuge, et d'une pesanteur dirigée vers le centre fixe* C, *et proportionnelle à une fonction donnée de la distance à ce point : trouver directement sa figure, par le principe d'égalité de pression?*

Soit N un point quelconque de la planète; et supposons que le lieu de tous les points où la pression est la même qu'en N, soit la couche ou la courbe $OTKH$. Menons du centre C la droite CNM,

et des points N, M les perpendiculaires NQ, MP à l'axe de révolution DE. Supposons $CQ = s$; $QN = z$; $CN = u$; la force centrale du point $N = \varphi$, fonction de s et z; la force centrifuge $= f$, pour la distance k; la pression en $N = p$, fonction de s et z, en sorte que $dp = P\,ds + Q\,dz$, P et Q étant des fonctions de s et z, telles que $P\,ds + Q\,dz$ soit une différentielle complète, autrement p seroit une quantité imaginaire, et il ne pourroit pas y avoir équilibre. Considérons la portion de fluide qui est en N comme un petit rectangle $Nnrq$, dont la hauteur $Nn = ds$, et la base $Nq = dz$: il est clair que $P\,ds$, différentielle de p en ne faisant varier que s, exprime l'élément de la pression sur chaque point de nr; et que $Q\,dz$, différentielle de p en ne faisant varier que z, exprime l'élément de la pression sur chaque point de qr. Donc la pression élémentaire contre $nr = P\,ds\,.\,dz$, et la pression élémentaire contre $qr = Q\,dz\,.\,ds$. Je décompose la force centrale φ en deux autres, l'une dirigée suivant Nn, l'autre suivant Nq : la première est $-\frac{\varphi s}{u}$; la seconde, $-\frac{\varphi z}{u}$: à celle-ci il faut ajouter la force centrifuge du point N, qui est $\frac{fz}{k}$. Alors, la force absolue qui pousse l'élément $Nnrq$ dans le sens Nn est $-\frac{\varphi s}{u}\,.\,ds\,dz$, et la force absolue qui le pousse dans le sens Nq est $\left(\frac{fz}{k} - \frac{\varphi z}{u}\right).\,ds\,dz$. Or, pour

qu'il y ait équilibre, il faut que ces deux forces soient égales chacune à chacune des pressions correspondantes et contraires. Donc $-\frac{\varphi s}{u} \cdot ds\,dz = P\,ds\,dz$, ou $-\frac{\varphi s}{u} = P$; $\left(\frac{fz}{k} - \frac{\varphi z}{u}\right) \cdot ds\,dz = Q\,dz\,ds$, ou $\frac{fz}{k} - \frac{\varphi z}{u} = Q$. Ainsi $dp = -\frac{\varphi s\,ds}{u} + \left(\frac{fz}{k} - \frac{\varphi z}{u}\right) dz = -\frac{\varphi(s\,ds + z\,dz)}{u} + \frac{fz\,dz}{k} = -\varphi\,du + \frac{fz\,dz}{k}$, et $p = A - \int\varphi\,du + \frac{fz^2}{2k}$, quantité qui doit être constante pour tous les points d'une même couche. Cette condition va nous donner la nature de la courbe extrême $ADBE$, et de la courbe intérieure $OTKH$.

Tout le reste demeurant le même, soient $CP = x$; $PM = y$; $CM = r$; la force centrale en $M = F$. La valeur générale de p devient pour le point M, $p = A - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k}$. Or, il est évident que dans toute l'étendue de la couche supérieure et dernière $ADBE$, la pression doit être nulle. Donc l'équation de cette courbe est

$$A - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k} = 0.$$

Cette équation doit convenir à tous les points de la courbe $ADBE$; et pour déterminer la constante A, il faut se donner un point fixe par où la courbe doive passer. Soit B ce point; supposons $CB = b$,

et pour ce même point $y = b$, $\int F\,dr = B$, quantité connue : on aura $A - B + \frac{fb^2}{2k} = 0$, ou $A = B - \frac{fb^2}{2k}$. L'équation de la courbe $ADBE$, entre r et y, est donc

$$B - \frac{fb^2}{2k} - \int F\,dr + \frac{fy^2}{2k} = 0.$$

Pour trouver l'équation de la courbe $OTKH$, reprenons la formule $p = A - \int \phi\,du + \frac{fz^2}{2k}$, ou $p = B - \frac{fb^2}{2k} - \int \phi\,du + \frac{fz^2}{2k}$. Donnons-nous le point K; supposons $CK = c$; et pour ce même point $z = c$, $\int \phi\,du = C$, quantité connue; d'où $p = B - \frac{fb^2}{2k} - C + \frac{fc^2}{2k}$. Ainsi, l'équation de la courbe $OTKH$, entre u et z est,

$$B - \frac{fb^2}{2k} - C + \frac{fc^2}{2k} = B - \frac{fb^2}{2k} - \int \phi\,du + \frac{fz^2}{2k};$$ c'est-à-dire, en réduisant,

$$C - \frac{fc^2}{2k} - \int \phi\,du + \frac{fz^2}{2k} = 0.$$

Voyez au sujet de ce Problême général et de plusieurs autres sur la même matière, un excellent Mémoire d'Euler (*Acad. de Berlin, ann.* 1755, pag. 217.)

202. *Corollaire.* Supposons que la force centrale ϕ, toujours dirigée vers le point fixe C, soit de plus constante en quantité : double supposition que

Huguens avoit d'abord faite pour déterminer la figure de la Terre, d'après les loix de l'Hydrostatique, combinées avec la nature de la force centrifuge, avant qu'on eût exécuté les fameuses opérations qui ont servi à déterminer le rapport des axes de la Terre par les mesures astronomiques et géodesiques.

Nommons g la force constante ϕ; nous aurons $F = g$; $\int F\,dr = gr$; $B = gb$; $\int \phi\,du = gu$. Ainsi l'équation de la courbe $ADBE$ sera $gb - \frac{fb^2}{2k} - gr + \frac{fy^2}{2k} = 0$; et celle de la courbe $OTKH$ sera $gc - \frac{fc^2}{2k} - gu + \frac{fz^2}{2k} = 0$.

Pour déterminer le rapport du rayon CB de l'équateur au demi-axe CD de révolution, on observera que pour CB, on a $r = y = b$; et pour CD; $y = 0$, ce qui donne $CD = r = b - \frac{fb^2}{2kg}$. Donc $CB : CD :: b : b - \frac{fb^2}{2kg} :: 1 : 1 - \frac{fb}{2kg}$; ou (en faisant l'arbitraire $k = b$), $CB : CD :: 1 : 1 - \frac{f}{2g}$. Reste à trouver la valeur numérique de la fraction $\frac{f}{2g}$.

Or 1°. la force g est la gravité primitive et non altérée par la force centrifuge. Cette gravité feroit parcourir à un corps tombant librement, 15 pieds 1 pouce 2 $\frac{05}{100}$ lignes, pendant l'intervalle de la première *seconde* de sa chûte, suivant le résultat

des expériences du pendule, faites à l'équateur par Bouguer (Voyez son Traité *de la figure de la Terre*, pag. 345). Et comme (en nommant s l'espace parcouru par un mobile, ϕ la force accélératrice, u la vitesse du mobile, t le temps du mouvement), les formules ordinaires $u\,d\,u = \phi\,ds$, $d\,t = \frac{ds}{u}$ donnent ici $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, ou $g = \frac{2s}{t^2}$; si nous nommons θ le temps (exprimé en secondes) qu'un corps animé de la gravité g mettroit à tomber d'une hauteur égale au rayon b de l'équateur terrestre, et que nous fassions successivement $s =$ 15 pieds 1 pouce 2,95 lignes $= E$, afin d'abréger; $s = b$; $t =$ 1 seconde; $t = \theta$; nous trouverons (en égalant entr'elles les deux valeurs résultantes pour g), $\theta^2 = 1'' \times \frac{b}{E}$, où il faudra, dans la suite, exprimer b et E en mesures de même espèce.

2°. La force centrifuge d'un mobile qui décrit uniformément la circonférence d'un cercle étant égale au quarré de sa vitesse, divisé par le rayon du cercle (voyez, par exemple, pour la démonstration, l'appendix qui accompagne ma pièce *sur la résistance de l'Ether au mouvement des planètes*, couronnée en 1762 par l'Académie des Sciences de Paris); si nous nommons c la circonférence pour le rayon b, T le temps de la révolution de la Terre autour de son axe, lequel est de 24 heures, nous aurons ici $f = \frac{c^2}{T^2 b}$. D'un autre côté,

la formule $g = \frac{2s}{t^2}$ donne (en faisant $s = b, t = \theta$), $g = \frac{2b}{\theta^2}$. Donc $\frac{f}{g} = \frac{c^2 \theta^2}{2b^2 T^2}$; ou (en mettant pour θ^2 sa valeur $1'' \times \frac{b}{E}$), $\frac{f}{g} = \frac{c^2}{2T^2 bE}$; expression dans laquelle le numérateur est censé multiplié par le quarré d'une seconde, ce qui conserve l'homogénéité, T étant un nombre de secondes.

Maintenant, supposons que chaque degré d'un grand cercle de la Terre vaille, en nombre rond, 57000 toises, ce qui résulte à peu-près des observations faites en France, au Pérou et au Nord; nous aurons $c = 360 \times 57000$ toises; $b = \frac{7}{44} \times 360 \times 57000$ toises. La valeur de $T = 24$ heures $= 86400$ secondes. Enfin évaluons E en toises et décimales de toises; nous trouverons, à très-peu de chose près, $E = 2{,}5173$ toises. Substituant toutes ces valeurs dans l'équation $\frac{f}{g} = \frac{c^2}{2T^2 bE}$; il nous viendra $\frac{f}{g} = \frac{1}{291{,}47}$, et $\frac{f}{2g} = \frac{1}{582{,}94}$. Donc $CB : CD :: 1 : 1 - \frac{1}{582{,}94} :: 582{,}94 : 581{,}94 :: 582 : 581$, à très-peu près.

203. *Remarque I.* Ce résultat, qui est à-peu-près celui que Huguens avoit trouvé par les seules observations faites en Europe, n'est pas conforme, à beaucoup près, au véritable rapport des axes de la Terre, que nous ferons connoître dans le pro-

blême suivant. Il faut donc conclure, ou que la pesanteur primitive n'est pas la même pour tous les points de la masse terrestre, ou qu'elle n'est pas dirigée vers un seul et même point fixe, ou enfin qu'elle ne satisfait ni à l'une ni à l'autre de ces deux conditions.

204. *Remarque II.* Newton, après avoir établi par les phénomènes le principe de la gravitation universelle en raison directe de la masse et du carré inverse des distances, suppose que la Terre, originairement fluide et de forme sphérique, s'étant changée par l'action de la force centrifuge, en un spheroïde un peu applati, qu'il regarde (sans le démontrer néanmoins), comme produit par la révolution d'une demi-ellipse autour de son petit axe, calcule la somme des attractions sur toutes les parties de la petite colonne qui va d'un point de la circonférence de l'équateur au centre, et sur toutes les parties de la petite colonne qui va de l'un des poles au centre. Ces deux sommes sont les poids des colonnes dont il s'agit. Du poids de la colonne *équatorienne* il retranche la somme des forces centrifuges de toutes les parties de cette même colonne; il égale la différence au poids de la colonne *polaire :* ce qui lui donne le rapport des axes de la Terre. Dans l'hypothèse où la masse est homogène, le diamètre de l'équateur est à l'axe de révolution, environ comme 230 est à 229.

Maclaurin est le premier qui ait démontré en rigueur qu'en effet la supposition de Newton est

légitime; et cela, quel que soit le rapport des axes du spheroïde. Il y parvient par la seule méthode synthétique, et sa théorie doit être regardée comme un des plus grands efforts de tête et du génie mathématique (Voyez-en le détail dans son *Traité des Fluxions*, ou dans sa pièce *sur le flux et reflux de la Mer*, qui partagea le prix de l'Académie des Sciences de Paris, en 1740).

205. Problême III. *Déterminer, par le moyen des observations, le rapport des axes de la Terre, en regardant cette planète comme un spheroïde elliptique peu différent d'une sphère.*

Soient $ADBE$ (*Fig.* 69) un méridien de la Terre; DE son axe; AB un diamètre de l'équateur; MN, mn deux arcs d'un même nombre de degrés, dont on a mesuré les longueurs, et qui sont supposés assez petits pour pouvoir être regardés comme de petits arcs de cercle; MO, NO, mo, no, les rayons de la développée, correspondans aux points M, N, n, p; Mp, mp, des ordonnées perpendiculaires au diamètre AB. Supposons $CD=a$; $CB=b$; $bb-aa=cc$; $CP=x$; $Cp=u$; $MO=R$; $mo=r$; le sinus total $=1$; l'angle *connu* BSM de la latitude du point $M=p$; l'angle aussi *connu* Bsm de la latitude du point $m=q$; la longueur de l'arc $MN=M$; celle de l'arc $mn=m$. On aura d'abord (à cause des secteurs semblables MON, mon), $R:r::M:m$, et par conséquent $Rm=rM$.

La propriété de l'ellipse donne $PM = \frac{a}{b}\sqrt{(bb-xx)}$; $SP = \frac{a^2 x}{b^2}$; $pm = \frac{a}{b}\sqrt{(bb-uu)}$; $SP = \frac{a^2 u}{b^2}$; $R = \frac{(b^4 - c^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$; $r = \frac{(b^4 - c^2 u^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$. D'un autre côté, on a $SP : PM :: \cos. p : \sin. p$; ce qui donne $x^2 = \frac{b^4 (\cos. p)^2}{b^2 - c^2 (\sin. p)^2}$. Semblablement $u^2 = \frac{b^4 (\cos. q)^2}{b^2 - c^2 (\sin. q)^2}$. Substituant dans l'équation $Rm = rM$, pour R et r leurs valeurs, pour x^2 et u^2 leurs valeurs, et observant que $(\sin. p)^2 + (\cos. p)^2 = 1$, $(\sin. q)^2 + (\cos. q)^2 = 1$, on trouvera $\frac{m}{(b^2 - c^2 (\sin. p)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{(b^2 - c^2 (\sin. q)^2)^{\frac{3}{2}}}$;

ou $m\,(b^2 - c^2 (\sin. q)^2)^{\frac{3}{2}} = M(b^2 - c^2 (\sin. p)^2)^{\frac{3}{2}}$;

ou $m^{\frac{2}{3}} (b^2 - c^2 (\sin. q)^2) = M^{\frac{2}{3}} (b^2 - c^2 (\sin. p)^2)$;

ou $c^2 = \frac{b^2 (M^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}})}{M^{\frac{2}{3}} (\sin. p)^2 - m^{\frac{2}{3}} (\sin. q)^2}$. Éliminons c^2, au moyen de sa valeur $b^2 - a^2$, nous aurons :

$$b^2 - a^2 = \frac{b^2 (M^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}})}{M^{\frac{2}{3}} (\sin. p)^2 - m^{\frac{2}{3}} (\sin. q)^2}.$$

D'où l'on tire $\frac{b^2}{a^2} = \frac{M^{\frac{2}{3}} (\sin. p)^2 - m^{\frac{2}{3}} (\sin. q)^2}{m^{\frac{2}{3}} (\cos. q)^2 - M^{\frac{2}{3}} (\cos. p)^2}$

$$= \frac{(M^{\frac{1}{3}} \sin. p + m^{\frac{1}{3}} \sin. q) . (M^{\frac{1}{3}} \sin. p - m^{\frac{1}{3}} \sin. q)}{(m^{\frac{1}{3}} \cos. q + M^{\frac{1}{3}} \cos. p) . (m^{\frac{1}{3}} \cos. q - m^{\frac{1}{3}} \cos. p)};$$

et par conséquent enfin

$$\frac{b}{a}=\sqrt{\frac{(M^{\frac{1}{3}}\sin.p+m^{\frac{1}{3}}\sin.q).(M^{\frac{1}{3}}\sin.p-m^{\frac{1}{3}}\sin.q)}{(m^{\frac{1}{3}}\cos.q+M^{\frac{1}{3}}\cos.p).(m^{\frac{1}{3}}\cos.q-M^{\frac{1}{3}}\cos.p)}}.$$

Formule à laquelle nous sommes parvenus, comme on voit, sans faire aucun développement en série, et où la rigueur géométrique ne souffre un peu que par la supposition très approchante de la vérité, que les arcs M, m, sont considérés comme de petits arcs de cercle. Appliquons cette formule aux nombres.

Selon Bouguer (*Figure de la Terre*, pag. 274), le premier degré de latitude = 56753 toises; et selon Maupertuis (*Figure de la Terre*, pag. 125), le degré de latitude au cercle polaire = 57437,9 toises. Supposant donc $m=56753$ toises; $M=57437{,}9$ toises; $q=0$; $p=66\frac{1}{2}$ degrés; et par conséquent sin. $q=0$; cos. $q=1$; sin. $p=0{,}91706$; cos. $p=0{,}39875$; nous trouverons $\frac{b}{a}=\frac{35383}{35213}$. Ainsi, $b:a::35383:35213::179:178$, à très-peu de chose près. Tel est le rapport des axes de la Terre, résultant de la comparaison des observations faites au Pérou et en Laponie. On trouve à-peu-près la même chose, en comparant les observations faites en France avec celles du Pérou ou de la Laponie.

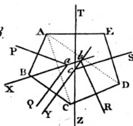
206. *Corollaire.* Connoissant les nombres de degrés et les longueurs des petits arcs M, m, que nous regardons comme des parties de circonférences de cercles, qui ont R, r, pour rayons, il est évident que

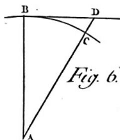
que l'on connoîtra ces rayons. D'un autre côté, on a donné ci-dessus les valeurs générales de R et de r. Reprenons, par exemple, celle de R : on trouve (en éliminant c^2 et x^2), $R = \frac{b^5}{a(bb-(bb-aa)(\sin.p)^2)^{\frac{3}{2}}}$. Mettant dans cette équation le rapport connu de b et de a, il ne restera plus qu'une seule inconnue b ou a, que l'on pourra par conséquent déterminer. On connoîtra donc toutes les dimensions du sphéroïde terrestre.

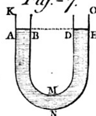
207. *Scholie général.* La nature de cet Ouvrage ne me permet pas de plus grands détails sur la question de la figure de la Terre. Je me contenterai d'ajouter que depuis plus de cent ans qu'on s'occupe de cette question, les Géomètres et les Astronomes trouvent encore les plus grandes difficultés, non-seulement à expliquer les observations par la théorie, mais encore à concilier ensemble les résultats des mesures des degrés du méridien, qui ont été prises en divers climats. La plupart de ces mesures, comparées entr'elles, permettent d'attribuer à la Terre la figure d'un sphéroïde elliptique applati, dont le rapport des axes est à-peu-près tel que nous venons de le trouver : quelques-unes donnent l'exclusion à cette hypothèse, et même emportent de la dissimilitude dans les méridiens. C'est sur quoi on peut consulter plusieurs Ouvrages particuliers, dont l'énumération seroit trop longue, les Mémoires des Académies de Paris, de Berlin, de Pétersbourg, et

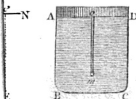
principalement l'article *Figure de la Terre*, dans l'*Encyclopédie;* article dont l'auteur est le célèbre d'Alembert.

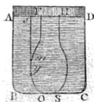
FIN de l'Hydrostatique.

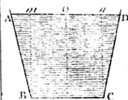

Fig.-3.
T
A
E
P
a
b
S
B
c
X
D
Q
Y
C
R
Z

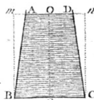

B
D
C
Fig. 6.
A

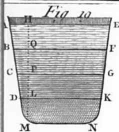

Fig.-7.
K
O
A
B
D
E
M
N

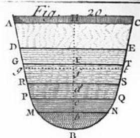

Fig. - 10.
A
D
m
B
C

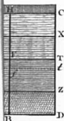

Fig. - 11.
A
D
B
Q
S
C

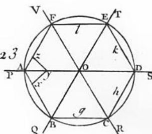

m
O
n
A
D
B
G
C
Fig.-15.

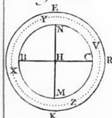

m
A
O
D
n
B
G
C
Fig.-16.

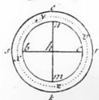

Fig. 19
A
H
E
B
Q
F
C
P
G
D
L
K
M
N


Fig. 20.
A
H
C
D
E
G
T
g
t
R
S
P
Q
M
N
B


H
C
X
T
t
Z
B
D


Fig 23
V
F
E
T
l
k
z
A
O
D
P
S
h
g
Q
B
C
R


Fig. 26.
E
Y
N
V
B
H
C
R
X
M
Z
K


Fig. 27.
e
n
b
h
c
r
m
k

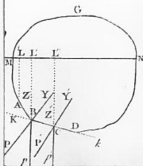
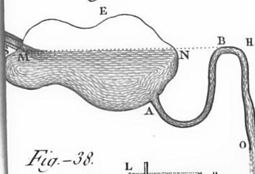
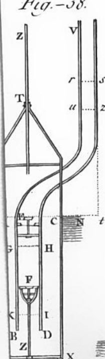
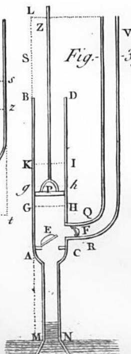
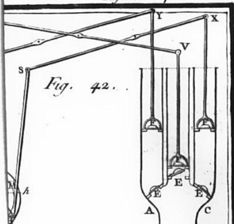

G
L
M
N
Z
Y
A
K
D
P
k

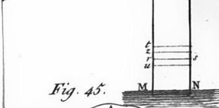

Fig 30
A
B
H
E
B
M
N
C

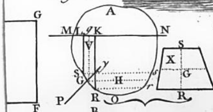

Fig.-33.
E
M
N
B
H
A
O

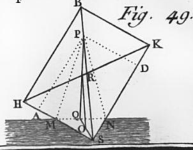

Fig.-38.
Z
V
r
s
u
z
T
C
N
t
G
H
F
K
I
B
D
Z
X

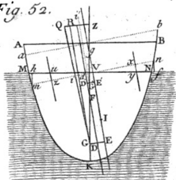

L
Z
V
S
Fig.-39.
B
D
K
I
g
P
h
G
H
Q
E
F
A
C
R
M
N

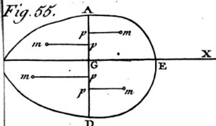

Y
X
V
S
Fig. 42.
E
E
E
A
C
h
t
z
r
s
u
M
N

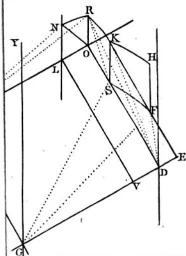

Fig. 45.
G
A
M
L
K
N
V
S
X
G
H
s
r
R
O
P
R
F

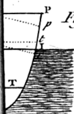


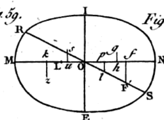

B
Fig. 49.
P
K
D
R
H
Q
A
M
O
N
S

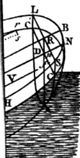

Fig. 52.
Q
R
Z
b
A
B
a
g
n
M
h
u
V
x
N
f
m
z
t
y
F
I
G
E
D
K

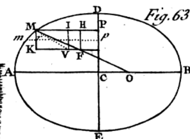

Fig. 55.
A
p
m
X
G
E
D

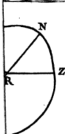

Fig. 57.
R
N
K
Y
O
H
L
S
F
E
D
V
G

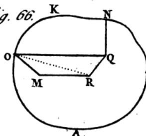

P
p
t
I
T


Fig. 59.
Fig. 60.
I
R
M
N
k
s
L
u
O
p
g
f
h
l
F
S
z
E

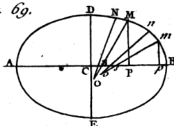

L
B
N
R
D
V
C
H


D
Fig. 63.
M
I
H
P
m
p
K
V
F
A
C
O
B
E


N
R
Z


Fig. 66.
K
N
O
Q
M
R
A


M
N
q
K
B


Fig. 69.
D
N
M
n
m
A
C
P
p
B
O
E

SECONDE PARTIE.

HYDRAULIQUE.

208. Sous le nom d'*Hydraulique*, on ne comprend pour l'ordinaire que la science du mouvement des eaux; mais je prends ici ce mot dans un sens plus étendu, et j'entends par-là cette partie de la Mécanique, qui détermine en général les loix du mouvement des fluides, tant incompressibles qu'élastiques.

Comme le mouvement des eaux est en ce genre l'objet le plus intéressant pour les besoins de la société, il en sera principalement ici question. Mais ce que j'en dirai s'applique également à tous les fluides incompressibles, et je me servirai souvent du mot *eau* comme d'un mot générique, pour désigner ces sortes de fluides. Le mouvement des fluides élastiques sera traité à part. A ces théories générales, je mêlerai ou je ferai succéder des questions qui appartiennent à l'Hydraulique, et qui, par leur importance ou leur utilité-pratique, attireront peut-être l'attention de ces lecteurs; dont le goût ne se borne pas à la simple recherche des vérités spéculatives, mais se porte de plus vers l'usage de ces vérités.

CHAPITRE PREMIER.

Principes généraux du mouvement des Fluides.

209. Le principe d'égalité de pression, sur lequel nous avons établi, dans la première partie de cet Ouvrage, les loix de l'équilibre des fluides, peut servir aussi à représenter, par des formules analytiques, les loix du mouvement des fluides. On en verra la preuve ci-dessous (*Chap. V*). Mais comme les formules dont il s'agit, dans leur état de généralité sont fort compliquées et presque inapplicables à la pratique, même pour les cas les plus simples, je vais examiner d'abord si, en renonçant à la trop scrupuleuse exactitude des hypothèses, sans s'exposer néanmoins au risque de commettre des erreurs sensibles dans la pratique, il n'est pas possible de soumettre le mouvement des fluides aux principes de la Mécanique et de la Géométrie. Cet ordre me paroît le plus naturel dans un Ouvrage destiné principalement à l'utilité publique : les objets de pure curiosité ne doivent trouver place ici qu'en seconde ligne.

210. On a observé que lorsqu'un fluide sort d'un vase par une ouverture faite au fond ou aux parois, sa surface demeure toujours horizontale, au moins sensiblement, et abstraction faite de la cause qui

produit au-dessus de l'orifice une espèce d'entonnoir, quand la surface du fluide est très-proche de l'orifice. D'où l'on a conclu, 1°. qu'en divisant, par la pensée, le fluide en une infinité de tranches horizontales, ces tranches, à mesure qu'elles s'abaissent, conservent sensiblement leur parallélisme. 2°. Que chaque point d'une même tranche descend verticalement, à l'exception toutefois des points qui avoisinent les parois supposées inclinées, mais dont le nombre est infiniment petit par rapport à celui des autres points de la tranche. La plupart des ouvrages où il est question du mouvement des fluides : par exemple, l'*Hydrodynamique* de Daniel Bernoulli, celle de Jean Bernoulli, les Théorèmes que Maclaurin a donnés à ce sujet dans son livre des *Fluxions*, le *Traité des Fluides* de d'Alembert, etc. sont fondés sur ces deux hypothèses, qui dans les cas les plus usuels, mènent à des calculs assez simples et assez exacts. Je les emploierai donc également; mais voici auparavant quelques remarques essentielles.

211. Soit $ABCD$ (*Fig.* 1) un vase qui contient de l'eau, laquelle sort par l'ouverture PQ, pratiquée dans le fond BC. Il résulte de l'extrême mobilité des particules fluides, qu'en vertu de la pesanteur, et des autres forces extérieures dont elles peuvent éprouver l'action, elles doivent se contrebalancer et se presser mutuellement, de telle manière qu'elles tendent à se diriger vers l'orifice, puisqu'en cet endroit le fond ou les parois du vase

n'offrent aucune résistance à la sortie du fluide. L'expérience apprend qu'elles descendent avec des vitesses sensiblement verticales et égales, jusqu'à ce qu'elles soient arrivées à une certaine distance de l'orifice, ou plutôt du plan horizontal qui rase le bord supérieur de cet orifice; distance qu'il est difficile de déterminer exactement, mais que j'ai évaluée plusieurs fois à trois ou quatre pouces. Passé ce terme, les particules qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, se détournent de la direction verticale, et viennent de tous côtés gagner l'orifice, suivant des directions plus ou moins obliques. Les sections AD, EF, GH, etc. planes ou courbes, sont supposées perpendiculaires aux directions des mêmes particules, c'est-à-dire, que les mêmes particules individuelles qui sont en AD, descendent successivement en EF, GH, etc. Il est visible que lorsque le vase est entretenu constamment plein à la même hauteur au-dessus de l'orifice, par de nouvelle eau qui remplace celle qui sort, et que l'écoulement a pris un cours régulier et permanent, les sections AD, EF, GH, etc. doivent toujours être les mêmes. Car aux mêmes endroits, les particules ont les mêmes vitesses, tant en direction qu'en quantité. Mais si la hauteur du fluide dans le réservoir augmente ou diminue, les sections dont il s'agit doivent subir quelque changement de nature, parce que les vitesses ne sont plus les mêmes aux mêmes endroits. Cependant, malgré la tendance universelle des particules vers l'orifice,

leur petitesse et la facilité qu'elles ont à rouler les unes sur les autres, établissent entr'elles un tel équilibre d'efforts et de position, que la surface supérieure du fluide demeure toujours horizontale, du moins jusqu'à une très-petite distance de l'orifice, comme on le verra dans la suite, lorsque je rapporterai en détail les expériences que j'ai faites sur les écoulemens des fluides.

212. Il en est de même lorsque le fluide sort par une ouverture latérale (*Fig.* 2). Toutes les particules descendent d'abord verticalement, puis se dirigent vers l'ouverture; et la surface supérieure demeure toujours horizontale. Seulement on doit observer ici que si l'orifice latéral PQ a une hauteur sensible par rapport à celle de l'eau dans le réservoir, toutes les particules n'ont pas la même vitesse, et qu'à raison d'une plus grande profondeur, elles se meuvent plus vite vers le bas que vers le haut de l'orifice; au lieu que dans les écoulemens par des orifices horizontaux, il ne peut pas y avoir dans la vitesse des particules, d'inégalité qui soit produite par une inégalité de profondeur dans les différens points de l'orifice.

213. Que l'orifice par lequel le fluide s'échappe, soit horizontal ou latéral : comme les particules qui ne répondent pas verticalement à l'orifice, s'y dirigent néanmoins avec des mouvemens plus ou moins obliques, il est clair qu'elles tendent à conserver ces mouvemens, et que par conséquent la

veine fluide, au sortir de PQ, doit se resserrer dans une certaine étendue Pp, et former ainsi une espèce de pyramyde tronquée $PQqp$, dont la plus petite base pq répond à l'endroit où la veine cesse de se resserrer pour commencer à prendre la forme prismatique. Il est essentiel d'avoir égard à cette *contraction de la veine fluide*, pour mesurer exactement les dépenses des réservoirs par des orifices proposés. Elle est très-sensible dans les écoulemens qui se font par des orifices percés dans de minces parois. Car on voit la veine se resserrer considérablement au sortir de l'orifice; et on trouve, comme l'expérience nous l'apprendra ci-dessous, que l'aire de l'orifice PQ est à l'aire de la section pq, dans un rapport qui diffère très-peu de celui de 8 à 5. La section pq est distante de PQ d'une quantité à-peu-près égale au rayon de l'orifice PQ. Dans les écoulemens par des bouts de tuyaux cylindriques, adaptés au réservoir, dénués de transparence, et assez longs pour que l'eau en suive les parois et sorte à gueule-bée, la contraction de la veine fluide ne se manifeste pas aux yeux; mais elle n'en existe pas moins à l'entrée de ces mêmes tuyaux. Elle y produit seulement un effet moins sensible que dans le premier cas; car alors la dépense diminue seulement dans le rapport de 8 à $6\frac{1}{2}$, à-peu-près; au lieu que dans le premier cas elle diminue dans le rapport de 8 à 5, à-peu-près. Tout cela sera pleinement éclairci par la voie de l'expérience. Ici, où il n'est question que de la théorie des écoule-

mens, je suppose qu'on ait diminué l'orifice dans le rapport que demande la contraction; et je regarde l'orifice corrigé de cette manière, comme celui par lequel se fait l'écoulement. Ainsi, lorsque l'eau sort par un orifice percé dans une mince paroi, et dont l'aire $= \mathcal{A}$, l'orifice corrigé et employé dans le calcul $= \frac{5}{8}\mathcal{A}$; et lorsque l'eau sort à gueule-bée par un tuyau additionnel dont la base $= \mathcal{A}$, l'orifice rectifié $= \frac{13}{16}\mathcal{A}$. Quant à la hauteur de l'eau dans le réservoir, elle doit être comptée, dans le premier cas, depuis la surface du fluide jusqu'au point où la veine cesse de se resserrer; et dans le second, depuis la surface du fluide jusqu'à l'ouverture extérieure du tuyau additionnel.

D'après ces remarques, nous allons établir deux propositions générales qui serviront de fondement à la théorie usuelle de l'Hydraulique.

214. Théorème I. *Le volume de liqueur qui sort d'un vase par un orifice, est égal au produit de cet orifice par la ligne qui représente la vitesse de l'écoulement.*

Car il est évident qu'à chaque instant il sort d'autant plus de points fluides, que l'orifice a plus d'étendue, et que sur cette étendue chaque point fluide sort avec plus de vitesse.

215. *Remarque.* On doit observer que j'ai dit le *volume* et non pas la *masse*. Ainsi, l'orifice et la vitesse étant les mêmes, il sortiroit, pendant le même temps, le même volume d'eau ou de mer-

cure; mais la masse de l'eau seroit à celle du mercure comme 1 est à 14, les masses étant proportionnelles aux poids, et les poids de l'eau et du mercure, sous même volume, étant comme les nombre 1 et 14, à-peu-près.

216. Théorème II. *Si l'on partage un fluide* ABCD (Fig. 1 et 2) *qui s'écoule par l'orifice* pq, *en une infinité de tranches* ADda, EFfe, GHhg, *égales en volumes, par des plans horizontaux, ou en général par des surfaces perpendiculaires aux directions des vitesses des particules; les vitesses de ces particules seront entr'elles en raison inverse des bases supérieures ou inférieures des tranches.*

En effet, il est clair qu'on peut regarder les tranches $ADda$, $EFfe$, $GHhg$, comme des prismes dont les bases sont les sections AD, EF, GH, et les hauteurs les perpendiculaires Rr, Ll, Mm. Donc, puisque toutes ces tranches ont des volumes égaux, on aura, par exemple, $EF \times Ll = GH \times Mm$; ce qui donne $Ll : Mm :: GH : EF$. Or, à mesure qu'une tranche s'abaisse de sa hauteur, elle est remplacée par la suivante; ainsi de suite de proche en proche. Donc les hauteurs Ll, Mm expriment les espaces parcourus en temps égaux par les tranches $EFfe$, $GHhg$, ou, ce qui revient au même, les vitesses de ces deux tranches. Par conséquent la proportion $Ll : Mm :: GH : EF$, revient à l'énoncé du Théorème.

217. *Corollaire*. La même proportion a lieu pour

une tranche quelconque, prise dans l'intérieur du vase, et pour la tranche qui sort actuellement de l'orifice. D'où l'on voit que si l'orifice est infiniment petit par rapport à la section du vase qui forme l'une des bases de la tranche intérieure, la vîtesse au sortir de l'orifice sera infinie par rapport à la vîtesse de la tranche intérieure; ou, ce qui revient au même et ce qui a réellement lieu, la vîtesse, à l'orifice, sera finie, et la vîtesse de la tranche intérieure sera infiniment petite.

Dans l'application que nous allons faire de ces principes, nous regardons les vases où les fluides sont contenus, comme solides, et conservant toujours la même figure. La théorie du mouvement des fluides dans des vases flexibles, présente trop de difficultés du côté de l'analyse, pour pouvoir espérer d'en tirer quelques résultats applicables à la pratique. L'expérience est le meilleur guide que l'on puisse consulter dans ces sortes de problêmes.

CHAPITRE II.

De l'écoulement de l'eau qui sort d'un vase par un petit orifice.

218. THÉORÈME. *La vîtesse de l'eau, à sa sortie d'un vase* ABCD (Fig. 3), *par un orifice infiniment petit* pq, *est égale à celle qu'acquerroit un corps grave en tombant de la hauteur verticale* Rq, *de la surface du fluide au-dessus de l'orifice.*

Imaginons que la liqueur soit partagée en une infinité de tranches égales, par des surfaces perpendiculaires aux directions des vîtesses des particules : l'orifice étant supposé infiniment petit par rapport aux différentes sections du fluide dans l'intérieur du vase, la vîtesse au sortir de l'orifice sera finie, et les vîtesses des tranches supérieures seront infiniment petites (217). Or, par la théorie de la chute des graves, si toutes les molécules fluides étoient abandonnées à l'action libre de leur pesanteur propre, elles descendroient avec la même vîtesse. Ainsi, puisque les tranches supérieures à l'orifice perdent la vîtesse qu'elles auroient naturellement par la pesanteur, le petit prisme d'eau (que je nomme M), qui sort à chaque instant, est pressé ou poussé par la liqueur supérieure, avec la même force que seroit poussé un piston que l'on mettroit en pq, pour empêcher l'écoulement; c'est-à-dire (25), avec une

fôrce exprimée par $pq \times Rq$, en nommant 1 la pesanteur spécifique ou la densité du fluide.

Supposons que durant l'instant que la pression $pq \times Rq$ fait sortir le prisme ou la masse M, la pesanteur seule que je représente par la petite verticale Sq, fît sortir un prisme ou une masse m : on voit que les masses M et m sont poussées, en même temps, par les forces motrices $pq \times Rq$, $pq \times Sq$. Ainsi, en nommant V et u les vîtesses de ces masses, on aura, $MV : mu :: pq \times Rq : pq \times Sq :: Rq : Sq$. Or, les masses M et m sont comme leurs volumes, et ces volumes sont (214) comme les produits de l'orifice par les vîtesses ; ce qui donne, $M : m :: pq \times V : pq \times u :: V : u$, et $MV : mu :: V^2 : u^2$. Donc $V^2 : u^2 :: Rq : Sq$.

Maintenant, soit U la vîtesse qu'acquerroit un corps grave, en tombant de la hauteur Rq ; on aura, par la théorie de la chute des graves, $U^2 : u^2 :: Rq : Sq$. Donc $V^2 = U^2$, et $V = U$; ce qui est l'énoncé du Théorème.

Nous avertissons, en passant, que pour abréger le discours, on dit souvent que la vîtesse, au sortir de l'orifice, est dûe à la hauteur Rq *du fluide dans le réservoir; ou réciproquement, que la hauteur* Rq *est dûe à la vîtesse en* q *: nous nous servirons de ces expressions.*

219. *Corollaire I.* La même proposition a lieu pour un orifice latéral infiniment petit; car la pression du fluide est égale (sous même profondeur) en toutes sortes de sens, et doit par conséquent pro-

duire la même vîtesse à la sortie de deux orifices très-petits, l'un horizontal, l'autre latéral, ces deux orifices étant supposés placés à la même distance de la surface supérieure de l'eau.

220. *Corollaire II.* La liqueur, au sortir de l'orifice, a une vîtesse capable de la faire remonter à une hauteur égale à la distance verticale de l'orifice au plan horizontal qui rase la surface du fluide, de la même manière qu'un corps en tombant par sa pesanteur d'un certaine hauteur, acquiert une vîtesse capable de le faire remonter à cette hauteur.

221. *Corollaire III.* On voit de même, par la théorie de la chute des graves, que si la vîtesse de la liqueur, au sortir de l'orifice, étoit continuée uniformément, la liqueur parcourroit un espace égal à 2 Rq, dans le même temps qu'un corps pesant emploieroit à tomber de la hauteur Rq.

222. *Remarque.* Nous n'avons pas besoin d'observer que la vîtesse du fluide, au sortir de l'orifice, sera toujours la même, sous la même hauteur Rq, quelle que soit l'espèce du fluide, puisqu'elle a constamment pour valeur la vîtesse dûe à la hauteur Rq. Ainsi Belidor se trompe, lorsqu'il dit (*Architecture Hydraulique, tome I*, page 187), que les vitesses de deux liqueurs différentes, telles que du mercure et de l'eau, sont entr'elles comme les racines carrées des produits des hauteurs par les pesanteurs spécifiques : ces vîtesses sont simplement entr'elles comme les racines carrées des hauteurs ; de sorte

que si les hauteurs deviennent égales, les vîtesses seront aussi égales. Si Belidor avoit remarqué, dans l'exemple qu'il donne, (n°. 490), qu'à la vérité la colonne qui chasse le mercure hors de l'un des vases, est quatorze fois aussi pesante que la colonne qui chasse l'eau hors de l'autre vase; mais qu'aussi la masse chassée dans le premier cas, est quatorze fois aussi grande que la masse chassée dans le second; il auroit vu sans peine que la vîtesse doit être la même dans les deux cas. En général, il est évident que lorsque les forces motrices sont proportionnelles aux masses qu'elles mettent en mouvement, les vîtesses sont égales.

Je suppose toujours que les deux vases sont placés dans un même endroit, ou du moins à la même latitude sensiblement. Mais si, par exemple, l'un étoit placé au pôle et l'autre à l'équateur, les vîtesses seroient entr'elles comme les racines carrées des produits des hauteurs par les pesanteurs au pôle et à l'équateur. Ces pesanteurs peuvent s'exprimer à peu-près par les nombres 289 et 288 respectivement. Je ne fais cette remarque qu'en passant; elle n'aura pas d'application dans la suite.

223. *Scholie*. Le raisonnement que nous avons fait (218) pour déterminer les vîtesses des écoulemens, est fondé sur ce principe, que la liqueur au sortir de l'orifice est chassée par le poids *entier* de la colonne correspondante, et suppose par conséquent que l'orifice est infiniment petit. Cependant la plupart des Auteurs élémentaires, qui en cela

ont presque tous copié Varignon, avancent que la liqueur, au sortir d'un orifice horizontal, est chassée par le poids de la colonne supérieure, sans limiter la grandeur de l'orifice. Il est évident que la proposition n'est pas vraie en général; car si l'on a, par exemple, un vase cylindrique vertical rempli d'eau, et qu'on imagine que tout d'un coup le fond soit anéanti, la tranche du fond ne souffrira aucune action des tranches supérieures, et elles descendront toutes avec la même vîtesse, suivant les loix de la chute des graves. La tranche du fond ne porte le poids total de la colonne supérieure, que quand les tranches supérieures perdent leurs vîtesses, et que conséquemment l'orifice est infiniment petit par rapport à elles (217).

Il est néanmoins essentiel de remarquer que si un orifice horizontal, quoique fini, est petit en comparaison de la largeur du réservoir, que, par exemple, le rapport de la première surface à la seconde, n'excède guère celui de 1 à 20; la vîtesse du fluide à la sortie de l'orifice, est sensiblement la même que si cet orifice étoit infiniment petit. Mais alors cette vîtesse n'est pas produite toute entière par la pression de la colonne supérieure. Chaque particule obéit à-la-fois à sa pesanteur propre et à l'action des particules contiguës, action qui est sans cesse favorisée ou contredite par leur adhérence réciproque. Or, on conçoit, sans qu'il soit peut-être possible de le démontrer en rigueur, que toutes ces forces peuvent tellement se combiner entr'elles, que

la

la vitesse de la liqueur, au sortir de l'orifice, soit la même que si elle étoit produite par le poids de la colonne supérieure. La chose est du moins indubitable par l'expérience. Seulement on observe que si l'orifice est un peu considérable, la vitesse n'acquiert sa plénitude uniforme et permanente qu'au bout d'un certain temps; car on trouve alors que la quantité de liqueur qui sort pendant les trois ou quatre premières secondes de l'écoulement, est un peu moindre que celle qui sort pendant trois ou quatre autres secondes de la suite du temps. Plus l'orifice est grand, plus cette inégalité se fait appercevoir.

224. Problême I. *Le vase* ABCD *qui donne de l'eau par le petit orifice* pq, *horizontal ou latéral, étant supposé entretenu plein à la même hauteur* Rq *au-dessus de cet orifice, au moyen d'une eau affluente qui remplace continuellement celle qui sort; on demande une équation qui contienne la relation entre la quantité d'eau écoulée, l'aire de l'orifice, le temps de l'écoulement et la hauteur* Rq.

Nommons K l'aire de l'orifice pq; t le temps de l'écoulement; h, la hauteur constante Rq de l'eau dans le vase, au-dessus de l'orifice; Q, la quantité d'eau écoulée pendant le temps t; θ, le temps *donné* qu'un corps grave met à tomber de la hauteur α, *donnée*. Si l'on fait cette proportion, $\sqrt{\alpha} : \sqrt{h} :: \theta$: un quatrième terme, ce quatrième terme $\frac{\theta \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}}$ sera le temps qu'un corps

grave mettroit à tomber de la hauteur h. Or, durant ce même temps, il doit sortir (221) une colonne fluide qui a l'aire K pour base et $2h$ pour hauteur, puisque la hauteur h est constante, et que par conséquent la vitesse, au sortir de l'orifice, demeure toujours la même. Ainsi la colonne, ou quantité de fluide, qui sort pendant le temps $\frac{\theta \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}}$, est exprimée par $2Kh$. Maintenant, il est clair que les quantités de fluide, qui sortent pendant les temps $\frac{\theta \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}}$ et t, sont entr'elles comme ces temps; ce qui donne la proportion, $\frac{\theta \sqrt{h}}{\sqrt{\alpha}} : t :: 2Kh : Q$; d'où l'on tire $\theta Q = 2tK\sqrt{\alpha}.\sqrt{h}$, qui est la formule demandée.

225. *Corollaire I.* Des six quantités que cette formule renferme, deux, savoir θ et α, sont toujours données; et nous supposerons, d'après l'expérience, que α étant $= 15{,}1$ pieds, $\theta = 1''$. Mais les quatre autres quantités, K, t, h, Q, peuvent varier; et on voit que trois d'entr'elles étant données, on connoîtra la quatrième : de-là résulte la solution des questions suivantes.

Question I. *Connoissant* K, t, *h*, *trouver* Q?

Cette question se résout par l'éq. $Q = \frac{2tK\sqrt{\alpha h}}{\theta}$.

Par exemple, supposons que la hauteur h de l'eau dans le réservoir soit de 12 pieds; que l'orifice, supposé circulaire, ait 1 pouce de diamètre, et que

l'écoulement dure une minute. En mettant ces données dans l'équation précédente, mettant aussi pour α, 15,1 pieds, et pour θ, 1 seconde : on trouvera $Q = 15216$ pouces cubes, à peu de chose près. Si on veut connoître le poids de cette quantité d'eau, on fera la proportion, 1728 pouces cubes sont à 15216 pouces cubes, comme 70 livres, poids du pied cube d'eau douce, ou de 1728 pouces cubes, sont au poids cherché, qu'on trouvera de 616 livres environ.

II. *Connoissant* h, t, Q, *trouver* K?

Cette question se résout par l'éq. $K = \frac{\theta Q}{2t\sqrt{\alpha h}}$.

Par exemple, soient $t = 1$ minute, $Q = 8$ pieds cubes, ou 13824 pouces cûbes, $h = 9$ pieds : on trouvera que K vaut à-peu-près la fraction décimale 0,824 d'un pouce carré.

Si l'orifice doit être un cercle, on aura (en nommant r son rayon), $r = \sqrt{\frac{7}{22}K}$, la fraction $\frac{7}{22}$ exprimant le rapport du diamètre à la circonférence; ce qui donne dans le cas présent, $r = 6\frac{1}{10}$ lignes environ.

III. *Connoissant* h, K, Q, *trouver* t?

Cette question se résout par l'éq. $t = \frac{\theta Q}{2K\sqrt{\alpha h}}$.

Par exemple, supposons $h = 9$ pieds, $K = 1$ pouce carré, $Q = 40000$ pouces cubes : on troutrouvera $t = 143{,}05$ secondes $= 2$ minutes 23 secondes à-peu-près.

IV. *Connoissant* Q, K, t, *trouver* h?

Cette question se résout par l'éq. $h = \frac{Q^2 \theta^2}{4 \alpha t^2 K^2}$.

Par exemple, soient $Q = 40000$ pouces cubes, $K = 1$ pouce carré, $t = 4$ minutes $= 240$ secondes : on trouvera $h = 3$ pieds 2 pouces 3 lignes $\frac{3}{5}$ à-peu-près.

226. Corollaire II. *Les quantités* Q *et* Q' *de liqueur, qui sortent dans le même temps par les orifices* K *et* K', *sous les hauteurs ou charges constantes* h *et* h', *sont entr'elles comme les produits des orifices par les racines carrées des hauteurs.*

Car on a les deux équations $Q = \frac{2 t K \sqrt{\alpha h}}{\theta}$, $Q' = \frac{2 t K' \sqrt{\alpha h'}}{\theta}$, lesquelles donnent, $Q : Q' :: K \sqrt{h} : K' \sqrt{h'}$. Ainsi connoissant, par l'expérience, tout ce qui est relatif à l'un des écoulemens, on pourra déterminer tout ce qui est relatif à l'autre.

Par exemple, l'expérience m'a appris qu'un orifice circulaire de 1 pouce de diamètre, percé dans une mince paroi, sous 4 pieds de charge, donne 5436 pouces cubes d'eau : si je veux savoir ce que donnera un orifice de 2 pouces de diamètre, sous 9 pieds de charge, je ferai la proportion, $1 \times \sqrt{4} : 4 \times \sqrt{9} ::$ 5436 pouces cubes : $x = 32616$ pouces cubes d'eau.

On observera que la contraction de la veine fluide affecte semblablement les écoulemens par deux ori-

fices de même nature, c'est-à-dire, ou tous deux percés dans une mince paroi, ou tous deux appartenans à des tuyaux additionnels; de sorte qu'alors on peut faire abstraction de l'effet de la contraction dans la proportion, $Q : Q' :: K\sqrt{h} : K'\sqrt{h'}$. Mais si l'un des écoulemens se fait par un orifice percé dans une mince paroi, l'autre par un tuyau additionnel, il faut, pour avoir égard à la contraction dans la proportion précédente, diminuer le premier orifice dans le rapport de 8 à 5, ou de 16 à 10; et le second dans le rapport de 8 à $6\frac{1}{2}$, ou de 16 à 13.

227. Problème II. *Le vase* ABCD (Fig. 4) *étant supposé se vider par le petit orifice* pq, *sans recevoir de nouvelle eau : on demande le temps que la surface de l'eau mettra à descendre de la hauteur donnée* Rk, *pour prendre la position* KH?

Supposons qu'au bout d'un certain temps, la surface de la liqueur soit parvenue dans la position indéterminée Mm. Qu'on mène parallèlement à ce plan le plan infiniment voisin Nn. Il est évident 1°. que durant l'instant que Mm descend en Nn, il sort par l'orifice pq une quantité d'eau égale à la tranche $MmnN$, qu'on peut regarder comme un prisme dont Mm est la base et Ll la hauteur, et qui a par conséquent pour valeur $Mm \times Ll$. 2°. Que durant ce même instant, la hauteur verticale Lq de Mm au-dessus de l'orifice, peut être regardée comme constante, puisqu'elle diminue seulement de la quantité infiniment petite Ll, qu'on

peut négliger par rapport à elle. D'où il suit (225), (*Quest. III*), qu'en nommant K l'aire de l'orifice pq, θ le temps qu'un corps grave met à tomber de la hauteur α; l'expression de l'instant ou du temps élémentaire employé à parcourir Ll sera $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{\alpha}.\sqrt{Lq}}$. Il ne s'agit plus que de trouver la somme de tous ces temps élémentaires, correspondans à la hauteur donnée Rk.

Sur la droite IS, égale et parallèle à Rq, comme axe, et avec un paramètre donnée p, construisez une parabole SFT; prolongez indéfiniment les sections AD, Mm, Nn, KH, du vase, pour avoir les ordonnées correspondantes IT, Vu, Gg, EF, de la parabole; construisez une seconde courbe XZY, telle que chacune de ses ordonnées Va soit égale au quotient de la section Mm divisée par l'ordonnée Vu de la parabole : alors le temps employé à parcourir Rk sera égal au produit de la quantité constante $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{\alpha}}$ par l'aire $IEZX$. Car, puisqu'on a par construction, $Va = \frac{Mm}{Vu}$, et par la propriété de la parabole, $\sqrt{VS}$ ou $\sqrt{Lq} = \frac{Vu}{\sqrt{p}}$: le temps élémentaire $\frac{\theta \times Mm \times Ll}{2K\sqrt{\alpha}.\sqrt{Lq}}$ deviendra (en mettant $Va \times Vu$ pour Mm, $\frac{Vu}{\sqrt{p}}$ pour $\sqrt{Lq}$, VG pour Ll), $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{\alpha}} \times Va \times VG$; expression

qui est le produit de la quantité constante $\frac{\theta \sqrt{p}}{2K\sqrt{\alpha}}$ par l'élément $VabG$ de l'aire $IEZX$. Donc (en désignant par $T.Rk$ le temps correspondant à Rk), on aura, $T.Rk = \frac{\theta \sqrt{p}}{2K\sqrt{\alpha}} \times IEZX$.

228. *Corollaire I.* Les quantités α, θ, p, K, étant constantes, il est clair que les temps employés à parcourir les hauteurs RL, Lk, sont entr'eux comme les aires correspondantes $IVaX$, $VEZa$. Donc si ces aires sont égales, ou en raison donnée, les temps seront égaux, ou en raison donnée.

Supposons, par exemple, que le vase $ABCD$ soit un solide produit autour de l'axe Rq, par la révolution d'une courbe parabolique DHq, dont la propriété est que les carrés de ses ordonnées RD, Lm, kH sont entr'eux comme les racines carrées des abscisses correspondantes qR, qL, qk. Alors les sections circulaires AD, Mm, KH du vase, qui sont entr'elles comme les carrés de leurs rayons RD, Lm, kH, seront entr'elles comme les racines carrées des abscisses qR, qL, qk, ou comme les ordonnées IT, Vu, EF de la parabole SFT. Donc tous les quotiens $\frac{AD}{IT}$, $\frac{Mm}{Vu}$, $\frac{KH}{EF}$ sont égaux; ce qui donne pour XZY une droite verticale : donc les parties de la hauteur Rk étant supposées égales, seront parcourues en temps égaux.

229. *Corollaire II.* Connoissant la hauteur Rk, on connoît l'espace $AKHD$, puisque la figure du

vase est donnée; et comme on vient de trouver le temps que le fluide met à s'abaisser de AD en KH, il s'ensuit que l'on connoît la quantité de liqueur qui sort durant ce même temps.

230. *Remarque.* Dans la solution du Problême précédent, j'ai employé des constructions géométriques, pour la rendre plus élémentaire et pour la mettre à la portée d'un plus grand nombre de lecteurs. Mais, en y appliquant le calcul intégral, la solution est beaucoup plus expéditive: En effet, si l'on suppose la hauteur Rq primitive et donnée du fluide $= h$, $RL = x$, la section $Mm = X$, fonction de x, donnée par la figure du vase; il est clair que Lq étant la hauteur dûe à la vitesse du fluide, quand la surface est parvenue en Mm, il est clair, dis-je, (224), que la quantité élémentaire d'eau qui sort pendant l'instant dt, est exprimée par $\frac{2Kdt\sqrt{[\alpha(h-x)]}}{\theta}$. Or, cette même quantité $=$ la tranche $MmnN = Xdx$. On aura donc, $dt = \theta \times \frac{Xdx}{2K\sqrt{\alpha}.\sqrt{(h-x)}}$; équation qu'on intégrera, soit exactement, soit par les quadratures des courbes, après y avoir substitué pour X sa valeur donnée en constantes et en x dans chaque cas particulier.

Par exemple, soit RqD une parabole ordinaire, qui en tournant autour de son axe Rq produit le vase $ABCD$. Nommons p le paramètre de cette parabole, π le rapport de la circonférence au dia-

mètre : la tranche $MmnN$ ou Xdx sera $= \Pi p (h-x)\, dx$, et on aura $dt = \frac{6\Pi p}{2K\sqrt{\alpha}} \times dx \sqrt{(h-x)}$, dont l'intégrale est $t = C - \frac{6\Pi p}{2K\sqrt{\alpha}} \times \frac{2(h-x)^{\frac{3}{2}}}{3}$. La constante C doit être telle qu'en faisant $x = 0$, on ait $t = 0$; ce qui donne $C = \frac{6\Pi p h \sqrt{h}}{3K\sqrt{\alpha}}$. Donc $t = \frac{6\Pi p [h\sqrt{h} - (h-x)\sqrt{(h-x)}]}{3K\sqrt{\alpha}}$.

231. *Scholie.* Dans l'état physique des choses, quand la surface du fluide approche de l'orifice, il se forme au-dessus de cet orifice une espèce d'entonnoir dans lequel l'air s'introduit; ce qui empêche en partie le fluide de sortir, et dénature l'écoulement. La formule précédente ne peut donc servir à déterminer l'écoulement que jusqu'au moment où l'entonnoir commence à se former; ce qui arrive pour l'ordinaire lorsque la surface du fluide est à 3 ou 4 pouces de l'orifice.

232. Problême III. *Le vase* ABCD (Fig. 5), *étant supposé prismatique ou cylindrique ; on demande le temps que la liqueur mettra à s'abaisser de* AD *en* KH ?

On voit que ce problême peut être résolu très-simplement, par le moyen de l'article 230. Mais en voici une solution élémentaire, suivant les principes de l'article 227.

Imaginons qu'un corps non pesant soit poussé de bas en haut, suivant la verticale qR, par une force accélératrice constante qui lui imprime les mêmes degrés de vitesse que la pesanteur imprime à un corps qui tombe librement ; de manière que le corps ascendant parcourt l'espace qR, suivant la même loi et dans le même temps que le corps descendant par la pesanteur parcourroit l'espace Rq. Il est clair que les différentes vitesses du corps ascendant étant proportionnelles aux racines carrées des espaces parcourus correspondans, de même que celles du corps descendant, pourront être exprimées par les ordonnées de la parabole SFT. Supposons que le corps ascendant étant arrivé en l, il parcoure le petit espace lL ou GV durant un temps infiniment petit, avec la vitesse représentée par l'ordonnée correspondante Vu de la parabole. Pour trouver l'expression de ce temps élémentaire, je considère que, suivant la théorie de la chute des graves, le temps total employé à parcourir qR est $\frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{\alpha}}$; et que si la vitesse finale du corps ascendant étoit continuée uniformément, ce corps parcourroit, durant ce même temps $\frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{\alpha}}$, un espace $= 2qR$. Or, dans les mouvemens uniformes, les espaces divisés par les vitesses, sont entr'eux comme les temps ; donc (en désignant le temps par la caractéristique T, placée au-devant de l'espace parcouru), nous aurons la proportion, $\frac{2qR}{lT} : \frac{GV}{Vu} :: \frac{\theta\sqrt{qR}}{\sqrt{\alpha}}$

: $T.\,G\sqrt{\ }$; ce qui donne $T.\,G\sqrt{\ } = \frac{\theta \times G\sqrt{\ } \times IT}{2\sqrt{u} \times \sqrt{\alpha} \times \sqrt{qR}}$,

ou bien (en mettant pour $\sqrt{qR}$ sa valeur $\frac{IT}{\sqrt{p}}$),
$T.\,G\sqrt{\ } = \frac{\theta\sqrt{p}}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{G\sqrt{\ }}{2\sqrt{u}}$ Comparant ce petit temps avec le petit temps $\frac{\theta\sqrt{p}}{2K\sqrt{\alpha}} \times \sqrt{a} \times \sqrt{G}$, que la surface de l'eau emploie à parcourir le même espace Ll ou $\sqrt{G}$ (224); et considérant que $\sqrt{a} = \frac{Mm}{\sqrt{u}}$, par construction : on verra que le premier est au second, dans le rapport constant de l'aire K de l'orifice à l'aire de la section Mm du vase, laquelle est par-tout de la même étendue, puisque le vase est supposé prismatique. Le même rapport ayant lieu entre les autres temps élémentaires que le corps ascendant et la surface de l'eau emploient à parcourir des petits espaces égaux, on conclura que le temps total, employé par le corps ascendant à parcourir la hauteur qR, est au temps total que le vase mettroit à se vider entièrement, comme l'aire K est à l'aire de la base BC que je nomme A. Ainsi le temps que le vase $ABCD$ met à se vider entièrement est $\frac{\theta\sqrt{Rq}}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{A}{K}$.

En regardant $KBCH$ comme le vase proposé, on démontrera de la même manière que le temps employé par ce vase à se vider entièrement, est

$\frac{\theta \sqrt{kq}}{\sqrt{\alpha}} \times \frac{A}{K}$. Or le temps que la surface de l'eau met à s'abaisser de AD en KH, est évidemment égal à la différence des deux temps dont on vient de parler. Donc, $T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{kq})}{K\sqrt{\alpha}}$.

233. *Corollaire I.* Notre équation $T.Rk = \frac{\theta A(\sqrt{Rq} - \sqrt{hq})}{K\sqrt{\alpha}}$, fournit la manière de construire une *horloge d'eau*, ou une *clepsydre*, de forme cylindrique. Par exemple, qu'il s'agisse de partager la hauteur AB, en douze parties qui soient parcourues en temps égaux par la surface du fluide : on représentera AB par 144, carré de 12 ; de ces 144 parties égales qui composent AB, on retranchera 121, carré de 11 ; le reste 23 fera connoître la première partie cherchée AM ; de 121, on retranchera 100, carré de 10, le reste 21 fera connoître la seconde partie cherchée ; de 100, on retranchera 81, carré de 9, le reste 19 fera connoître la troisième partie, etc. D'où l'on voit que les parties successives de la hauteur qu'on demande, sont exprimées par la suite des nombres 23, 21, 19, 17, 15, etc.

Quant à la mesure précise du temps employé à parcourir chaque partie de la hauteur AB, on le déterminera par notre formule. Ainsi, si l'on veut que ce temps = 1 heure, on fera $t = 1$ heure ; et il faudra tellement proportionner la base A et la hauteur h du vase avec l'aire K de l'orifice,

qu'on ait, 1 heure $= \frac{\theta A(\sqrt{h} - \sqrt{\frac{121}{144}h})}{K\sqrt{\alpha}}$,

ou 1 heure $= \frac{\theta A\sqrt{h}}{12K\sqrt{\alpha}}$. On voit par cette équation, que deux des trois quantités A, h, K, étant données, on trouvera la troisième.

Dans l'usage de ces sortes de clepsydres, on aura soin, conformément à la remarque de l'article 231, de ne pas attendre que la surface du fluide s'approche trop près du fond, ou de n'employer, par exemple, que les onze premières divisions.

Corollaire II. Si l'on a un vase prismatique $ABCD$, plein jusqu'en AD, et qu'on lui permette de se vider entièrement; qu'ensuite l'ayant rempli de nouveau jusqu'en AD, on l'entretienne constamment plein à cette hauteur, tandis qu'il sort de l'eau par l'orifice pq : il sortira dans ce second cas une quantité d'eau, double de celle qui est contenue dans l'espace $ABCD$, pendant le même intervalle de temps que le vase a mis d'abord à se vider entièrement, abstraction faite de l'entonnoir. Car, dans le premier cas, le temps que le vase met à se vider entièrement, est exprimé par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{\alpha}}$ (232). Or (224) la quantité de liqueur qui s'écoule dans le second cas, pendant le temps $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{\alpha}}$, est exprimée par $\frac{\theta A\sqrt{h}}{K\sqrt{\alpha}} \times \frac{2K\sqrt{\alpha h}}{\theta} = 2A \times h$, quantité double du prisme $ABCD$ qui est égal à $A \times h$.

234. *Corollaire III.* Lorsqu'on voudra comparer ensemble les temps des écoulemens de deux vases prismatiques qui se vident, on observera qu'en désignant pour le second vase les quantités analogues à Rq, kq, Rk, A, K, par les mêmes lettres accentuées, on a les deux équations, $T.Rk = \frac{6A(\sqrt{Rq}-\sqrt{kq})}{K\sqrt{a}}$, $T.R'k' = \frac{6A'(\sqrt{R'q'}-\sqrt{k'q'})}{K'\sqrt{a}}$; d'où l'on tire, $T.Rk : T.R'k' :: \frac{A(\sqrt{Rq}-\sqrt{kq})}{K} : \frac{A'(\sqrt{R'q'}-\sqrt{k'q'})}{K'}$. Ainsi, les temps employés par les surfaces des eaux à parcourir les hauteurs Rk, $R'k'$, sont entr'eux comme les produits des bases des prismes par les différences des racines carrées des hauteurs premières et des hauteurs dernières des eaux dans les réservoirs, divisés par les aires des orifices.

On fera ici, par rapport aux effets de la contraction de la veine fluide, une remarque analogue à celle qui termine l'article 226.

235. *Corollaire IV.* Si un vase prismatique contenoit des fluides de différentes espèces, on détermineroit l'écoulement de la même manière. Car soit, par exemple, le vase $ABCD$ (*Fig.* 6), qui contient trois fluides différens $BFLC$, $FEGL$, $EADG$, lesquels sont supposés ne pouvoir se mêler ensemble, les plus légers étant posés sur les plus pesans. Que ce vase se vidant par l'orifice pq, la surface du fluide inférieur parvienne en un certain temps t dans

la position OP. Soient p, p', p'' les pesanteurs spécifiques de ces trois fluides. On voit (32), que la pression, qui produit l'écoulement par l'orifice pq, est la même que si, à la place des deux fluides supérieurs, on substituoit des fluides de même espèce que $BFLC$, et dont les hauteurs fussent $\frac{p' \times FE}{p}$, $\frac{p'' \times EA}{p}$. La question est donc de déterminer la temps de l'écoulement d'un seul fluide, pareil à $BFLC$, et dont la hauteur au premier instant du temps t est $BF + \frac{p' \times FE}{p} + \frac{p'' \times EA}{p}$. Nommons H cette hauteur ; et h la hauteur dernière, ou celle qui répond à la fin du temps t que le fluide a mis à parcourir l'espace $H - h$. On aura (en conservant les autres dénominations de l'article 232), $t = \frac{A(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K\sqrt{\alpha}}$; et pour avoir le temps que notre fluide fictif met à parcourir la hauteur FB, ou, ce qui revient au même, le temps que le fluide inférieur $BFLC$ met à sortir entièrement, il faudra faire dans l'expression précédente, $H - h = BF$, ou $h = H - BF = \frac{p' \times FE}{p} + \frac{p'' \times EA}{p}$.

Le fluide inférieur étant sorti, nous pourrons concevoir que le fond du vase est FL, et que l'orifice pq est percé dans ce fond. Alors, en changeant le fluide supérieur $EADG$ en une autre de même espèce que $FEGL$, on trouvera que l'expression du temps t, que le fluide $FEGL$ met à sortir en-

tièrement, est $t = \frac{6A(\sqrt{H} - \sqrt{h})}{K\sqrt{a}}$, en faisant dans cette expression $H = FE + \frac{p'' \times EA}{p'}$; $h = \frac{p'' \times EA}{p'}$; ainsi de suite, quel que soit le nombre des fluides.

CHAPITRE III.

De l'écoulement des eaux par un petit orifice de figure donnée, lorsque tous les points de cet orifice ne peuvent pas être supposés également distans du plan de la surface du fluide.

236. DANS la pratique, les eaux sortent souvent par des ouvertures latérales qui, quoique petites en comparaison des amplitudes ou sections horizontales des réservoirs, ne peuvent pas cependant être censées avoir tous leurs points à égales distances de la surface du fluide. Tels sont, par exemple, les pertuis des moulins. Alors la méthode ordinaire est de déterminer l'écoulement d'après ce raisonnement. Concevons d'abord que l'orifice soit bouché par une plaque, et qu'ensuite on perce cette plaque d'une infinité de trous par lesquels l'eau s'échappe. En regardant chacun de ces trous comme un orifice particulier

ticulier et isolé, la vitesse en cet endroit seroit dûe à la hauteur correspondante du fluide; donc, ajoute-t-on, si l'on multiplie le nombre des trous à l'infini, ou, ce qui revient au même, si l'on imagine que la plaque entière soit ôtée, la vitesse en chacun des points de l'orifice proposé, sera dûe à la hauteur correspondante du fluide; et dans la détermination de la quantité d'eau écoulée, il faudra avoir égard à cette inégalité des vitesses. Mais on ne peut pas se dissimuler que ce raisonnement n'est rien moins que démonstratif. Tant que la somme des petits trous percés dans la plaque substituée à l'orifice, est fort petite en comparaison de l'amplitude du réservoir, les portions de liqueur qui sortent par chaque trou, sont chassées par les poids absolus des colonnes supérieures, et l'écoulement se fait comme dans l'article 224. Mais du moment que le nombre des trous augmente à l'infini, et que les filets deviennent contigus les uns aux autres, on ne voit pas clairement qu'ils doivent sortir de la même manière qu'ils sortiroient par de petits trous isolés. Cependant comme cette hypothèse donne des résultats assez conformes à l'expérience, je la prendrai d'autant plus volontiers pour base dans les Problêmes suivans, qu'elle mène à des calculs fort simples, et que dans les questions usuelles, il faut rechercher cette simplicité autant qu'il est possible sans violer les droits sacrés de l'exactitude.

237. Problême I. *Exposer en général la manière de déterminer les écoulemens par des ouvertures*

latérales dont tous les points ne peuvent pas être supposés également distans de la surface du fluide?

En supposant, d'après ce qui vient d'être dit, que dans les écoulemens de ce genre, la vitesse de chaque point de l'orifice soit égale à celle qu'un corps grave acquerroit en tombant de la hauteur du fluide, correspondante à ce point; nous imaginerons que l'orifice proposé soit partagé en une infinité de rectangles ou de trapèzes par des plans horizontaux; et regardant chacun de ces trapèzes élémentaires, comme un orifice particulier, dont tous les points peuvent être supposés également distans de la surface du fluide, on déterminera (224) la quantité de liqueur qu'il doit fournir pendant un temps donné. Ensuite il ne s'agira plus que de trouver la somme de toutes ces quantités élémentaires de fluide, pour avoir la quantité totale que l'orifice entier doit donner pendant le même temps.

Faisons quelques applications de ces principes généraux.

238. Problême II. *Déterminer* (Fig. 7) *la quantité* Q *d'eau qui sort en un temps donné par un orifice rectangulaire vertical* LNOM, *d'un vase* ABCD *entretenu plein d'eau à la hauteur constante* RV?

Menez parallèlement aux bases opposées et horizontales LM, NO de l'orifice, les droites infiniment voisines XZ, xz, qui déterminent le rectangle élémentaire $XZzx$ de la surface de l'orifice.

Il est évident que tous les points de ce rectangle peuvent être censés à la même distance de la surface du fluide. Nous supposons qu'à chacun d'eux répond une vitesse dûe à la hauteur RI. Ainsi (en nommant t le temps de l'écoulement; θ, le temps de la chute d'un corps grave par la hauteur α), la quantité d'eau qui sortira, pendant le temps t, par le rectangle $XZzx$, sera exprimée (224) par $\frac{2XZ \times Ii \times t\sqrt{\alpha} \times \sqrt{RI}}{\theta}$, ou par $\frac{2XZ \times t\sqrt{\alpha}}{\theta} \times Ii \times \sqrt{RI}$. La question est de trouver la somme de toutes ces quantités élementaires d'eau, afin d'avoir la quantité totale qui s'écoule par l'orifice fini $LNOM$.

Pour cela, je construis sur l'axe RV, avec un paramètre quelconque p, la parabole RT; et je prolonge les droites KM, IZ, iz, VO, jusqu'en Y, S, s, T. Le petit trapèze parabolique $ISsi$ (qu'on peut regarder comme un rectangle, dont IS est la base et Ii la hauteur) a pour expression $Ii \times IS$ ou bien (à cause de $IS = \sqrt{RI} \times \sqrt{p}$), $Ii \times \sqrt{RI} \times \sqrt{p}$. Donc (en nommant e ce trapèze; q la quantité élémentaire d'eau qui sort par le rectangle $XZzx$), on aura, $e : q :: Ii \times \sqrt{RI} \times \sqrt{p} : \frac{2XZ \times t\sqrt{\alpha}}{\theta} \times Ii \times \sqrt{RI}$; ce qui donne $q = e \times \frac{2XZ \times t\sqrt{\alpha}}{\theta\sqrt{p}}$. D'où l'on voit que si l'on parvient à trouver la somme des e, c'est-à-dire, la surface parabolique $KVTY$, on

aura la somme des q, c'est-à-dire, la quantité totale Q d'eau écoulée par l'orifice $LNOM$, en multipliant l'aire parabolique $KVTY$, par la fraction constante et donnée $\frac{2XZ \times t\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{p}}$.

Ayant achevé le rectangle $RVTH$, et ayant mené les droites SG, sg parallèles à VR, j'observe que le triligne parabolique extérieur RHT est composé d'élémens SG, sg, qui sont proportionnels (par la propriété de la parabole) aux carrés des parties correspondantes RG, Rg, de la droite RH; donc ces élémens croissent comme les tranches d'une pyramide qui auroit son sommet en R, et RH pour hauteur : d'où il suit que la somme des GS, ou l'aire RHT, est égale au tiers du produit de la hauteur RH par la droite HT qui est la dernière des GS. Ainsi l'espace $RHT = \frac{RH \times HT}{3} = \frac{VR \times VT}{3}$; et par conséquent l'espace parabolique intérieur $RVT = \frac{2}{3} RV \times VT$. Semblablement l'espace parabolique $RKY = \frac{2}{3} RK \times KY$. Par conséquent l'espace cherché $KVTY = \frac{2}{3}(RV \times VT - RK \times KY)$. Nous aurons donc $Q = \frac{2}{3}(RV \times VT - RK \times KY) \times \frac{2XZ \times t\sqrt{\alpha}}{6\sqrt{p}}$; ou bien (en mettant pour VT sa valeur $\sqrt{VR} \times \sqrt{p}$; pour KY, sa valeur $\sqrt{RK} \times \sqrt{p}$;

et supposant $VR = H$; $RK = h$; $XZ = f$),
$Q = \frac{4f.t\sqrt{\alpha}.(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})}{3\theta}$, expression dans laquelle tout est connu.

On voit que parmi les sept quantités que cette équation renferme, θ et α sont toujours les mêmes, mais que les cinq autres Q, H, h, f, t, peuvent varier, et que quatre d'entr'elles étant données, on pourra trouver celle qui est inconnue; ce qui fournit des questions analogues à celles qui font l'objet de l'article 225.

239. *Corollaire.* Soit nommée x la hauteur *moyenne* de l'eau au-dessus de l'orifice, c'est-à-dire, une hauteur telle que si tous les filets d'eau sortoient avec une seule et même vitesse égale à celle que peut acquérir un corps grave en tombant de la hauteur x, il s'écoulât pendant le temps t la même quantité d'eau qu'il s'en écoule avec les vitesses naturelles dans l'hypothèse du problème : on aura (224), $Q = \frac{2tf(H-h)\sqrt{\alpha x}}{\theta}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q, et dégageant x, on trouvera $x = \frac{4(H\sqrt{H} - h\sqrt{h})^2}{9(H-h)^2}$. Cette hauteur moyenne diffère de la verticale qu'on éleveroit du centre de gravité de l'orifice $LNOM$ à la surface de l'eau, et qui auroit par conséquent pour valeur, $\frac{H+h}{2}$. Mais plus la surface de l'eau est élevée au-dessus de la base supérieure LM de l'orifice (toutes choses

d'ailleurs égales), plus la différence dont il s'agit diminue. En effet, à mesure que KR augmente, tout le reste demeurant le même, l'arc YST approche de plus en plus d'une ligne droite, et le segment parabolique $KVTSY$ d'un trapèze rectiligne. Or si le segment parabolique devenoit réellement un trapèze rectiligne, l'ordonnée moyenne ou la vitesse moyenne de l'eau répondroit au milieu de KV. Donc aussi la hauteur moyenne répondroit au même point.

240. *Remarque.* Si pour résoudre le problême précédent on employoit le calcul intégral, on auroit (en supposant $RI=z$), q ou $dQ=\frac{2tfdz\sqrt{z}.\sqrt{\alpha}}{\theta}$, dont l'intégrale est $Q=\frac{4tfz^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\alpha}}{3\theta}+C$. La constante C doit être telle que $z=h$, donne $Q=0$; ce qui donne $C=-\frac{4tfh^{\frac{3}{2}}.\sqrt{\alpha}}{3\theta}$. Donc en général $Q=\frac{4tf(z^{\frac{3}{2}}-h^{\frac{3}{2}}).\sqrt{\alpha}}{3\theta}$; et faisant $z=H$, on aura $Q=\frac{4tf(H\sqrt{H}-h\sqrt{h}).\sqrt{\alpha}}{3\theta}$ pour l'expression de la quantité d'eau qui sort pendant le temps t par l'orifice entier $LNOM$.

241. Problême III. *Déterminer la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné par l'orifice triangulaire vertical* NKO (Fig. 8) *d'un vase* ABCD,

entretenu constamment plein, la base NO *de cet orifice étant supposée horizontale ?*

Par le sommet K du triangle KNO, menez la verticale RKV, qui partage ce triangle en deux triangles rectangles KVO, KVN; menez ensuite les deux horizontales infiniment voisines XZ, xz; ce qui nous donne le petit orifice élémentaire $XZzx$ pour le triangle KVO.

Soient la hauteur totale RKV de l'eau dans le réservoir $=H$; la hauteur $RK=h$; $RX=z$; $VO=m$; la quantité élémentaire d'eau qui sort pendant le temps t par l'orifice $XZzx = dQ$; le temps par la chûte donnée $\alpha = \theta$. On aura $XZ = \frac{m(z-h)}{H-h}$; et $dQ = \frac{2tm(z-h).dz.\sqrt{z}.\sqrt{\alpha}}{(H-h)\theta}$, dont l'intégrale est $Q = \frac{4tm.z^{\frac{5}{2}}\sqrt{\alpha}}{5(H-h)\theta} - \frac{4tmh.z^{\frac{3}{2}}\sqrt{\alpha}}{3(H-h)\theta} + C$. La constante C doit être telle que $z = h$, donne $Q = 0$; donc $C = \frac{8tm.h^{\frac{5}{2}}.\sqrt{\alpha}}{15(H-h)\theta}$; et en général, $Q = \frac{4tm(2h^{\frac{5}{2}} + 3z^{\frac{5}{2}} - 5hz^{\frac{3}{2}}).\sqrt{\alpha}}{15(H-h)\theta}$. Faisant $z = H$, on aura $Q = \frac{4tm(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5h.H^{\frac{3}{2}}).\sqrt{\alpha}}{15(H-h)\theta}$, pour la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t par l'orifice partiel KVO.

Il est clair que si l'on suppose $VN = n$, et qu'on substitue n pour m dans la formule précé-

dente, elle exprimera la quantité d'eau Q' qui sort par l'orifice partiel KVN. Donc, en faisant NO ou $m + n = c$, on aura, $Q + Q' = \frac{4tc(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}}).\sqrt{\alpha}}{15(H-h)\theta}$, pour l'expression de la quantité d'eau qui sort, pendant le temps t, par l'orifice entier KNO.

242. *Corollaire.* Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice : on aura (224), $Q = \frac{tc(H-h).\sqrt{x}.\sqrt{\alpha}}{\theta}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q, et dégageant x, il viendra $x = \frac{16(2h^{\frac{5}{2}} + 3H^{\frac{5}{2}} - 5hH^{\frac{3}{2}})^2}{225(H-h)^4}$. Cette expression diffère de celle de la distance du centre de gravité du triangle à la surface du fluide, qui a pour valeur $h + \frac{2}{3}(H-h)$, ou $\frac{2H+h}{3}$. Mais la différence est peu sensible, quand la surface de l'eau est un peu élevée au-dessus de l'orifice, et on peut alors supposer $x = \frac{2H+h}{3}$, pour abréger le calcul.

243. *Scholie.* Si la pointe du triangle étoit en bas et la base en haut (*Fig.* 9), on trouveroit (en faisant $RK = H$, $RV = h$, $NO = c$, et procédant d'ailleurs de même), que la quantité d'eau qui sort, pendant le temps t, par l'orifice KNO, a pour valeur $\frac{4tc(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}})\sqrt{\alpha}}{15(H-h)\theta}$.

Et en nommant x la hauteur moyenne de l'eau, on auroit $x = \frac{16(2H^{\frac{5}{2}} + 3h^{\frac{5}{2}} - 5Hh^{\frac{3}{2}})^2}{225(H-h)^4}$.

244. Problême IV. *Déterminer la quantité d'eau qui sort pendant un temps donné, par l'orifice circulaire vertical* KMVN (Fig. 10) *d'un vase entretenu constamment plein ?*

Soient RV, RK les hauteurs constantes de l'eau dans le réservoir, au-dessus des points le plus bas et le plus haut de l'orifice. Ayant mené au diamètre vertical KV, les ordonnées infiniment voisines PM, pm, tirez le rayon OM.

Nommons t le temps donné; θ le temps par la chûte donnée α; Q la quantité d'eau écoulée; r le rayon OK; z l'angle KOM pour le rayon 1; Π le rapport de la circonférence au diamètre; n le rapport de la hauteur RO de l'eau au-dessus du centre de l'orifice, au rayon OK, en sorte que $RO = nr$. On aura, $PM = r \sin. z$; $OP = r \cos. z$; $RP = nr - r\cos. z$; $Pp = d(KP) = rdz \sin. z$; le petit trapèze $PMmp = r^2 dz (\sin. z)^2$. Donc (224), $dQ = \frac{t\sqrt{\alpha}}{\theta} \times 2r^2 dz(\sin. z)^2 . \sqrt{(nr - r\cos. z)}$.

Pour parvenir à intégrer cette équation, on observera que $dz(\sin. z)^2 \sqrt{[n - \cos. z]} = dz[1 - (\cos. z)^2]\sqrt{[n - \cos. z]} = dz[1 - (\cos. z)^2] \times$ $[n^{\frac{1}{2}} - \frac{n^{-\frac{1}{2}} \cos. z}{2} - \frac{n^{-\frac{3}{2}}(\cos. z)^2}{8} - \frac{n^{-\frac{5}{2}}(\cos. z)^3}{16}$

$$-\frac{5n^{-\frac{7}{2}}(\cos. z)^4}{128}-\frac{7n^{-\frac{9}{2}}(\cos. z)^5}{256}-\frac{63n^{-\frac{11}{2}}(\cos. z)^6}{3072}$$
— etc.]

Or, comme l'intégrale qu'on demande doit s'évanouir lorsque $z = 0$, et recevoir sa valeur complète lorsque $z = 360$ degrés, le calcul peut s'abréger considérablement. Car on peut négliger dans l'équation différentielle tous les termes qui renfermeroient cos. z, cos. $2z$, cos. $3z$, cos. $4z$, etc.; parce que ces termes, en passant dans l'intégrale, contiendroient sin. z, sin. $2z$, sin. $3z$, sin. $4z$, etc., qui s'évanouissent lorsque $z = 0$, et lorsque $z = 360$ degrés. Par conséquent, puisqu'on a en général, $(\cos. z)^2 = \frac{1+\cos. 2z}{2}$; $(\cos. z)^3 = \frac{\cos. z + \cos. z \cos. 2z}{2} = \frac{3\cos. z}{4} + \frac{\cos. 3z}{4}$; $(\cos. z)^4 = \frac{1}{4} + \frac{\cos. 2z}{2} + \frac{(\cos. 2z)^2}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\cos. 2z}{2} + \frac{\cos. 4z}{8}$, etc.; on supposera $\cos. z = 0$, $(\cos. z)^2 = \frac{1}{2}$, $(\cos. z)^3 = 0$, $(\cos. z)^4 = \frac{3}{8}$, $(\cos. z)^5 = 0$, $(\cos. z)^6 = \frac{5}{16}$; etc. L'équation à intégrer sera donc, $dQ = \frac{tr^2\sqrt{(\alpha n r)}}{\theta} \times dz\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{etc.}\right)$: d'où l'on tire (en faisant après l'intégration, $z = 360$ degrés $= \frac{2\Pi}{1}$), $Q = \frac{2\Pi tr^2\sqrt{(\alpha n r)}}{\theta}\left(1 - \frac{1}{32n^2} - \frac{5}{1024n^4} - \text{etc.}\right)$, expression de la quantité d'eau qui sort pendant le temps t, par l'orifice entier

$KMVN$. Cette série est si convergente, que pour peu que OR surpasse OK, il sera plus que suffisant d'employer ses trois premiers termes dans la pratique.

245. *Corollaire.* Soit x la hauteur moyenne de l'eau au-dessus de l'orifice : on aura (224), $Q = \frac{2 t \Pi r^2 \sqrt{\alpha x}}{6}$. Égalant entr'elles les deux valeurs de Q et dégageant x, on trouvera $x = n r \left(1 - \frac{1}{16 n^2} - \frac{9}{1024 n^4} - \text{etc.}\right)$. Par où l'on voit que la hauteur moyenne x est moindre que RO. Lorsque n vaut au moins 1, ces deux lignes peuvent être regardées comme égales dans la pratique.

246. *Remarque I.* Lorsque la surface de l'eau affleure l'extrémité supérieure K du diamètre KV, on a $n = 1$, et la formule de l'article 244 peut donner encore Q. Mais alors, en cherchant directement Q, on trouvera que cette quantité peut s'exprimer par une équation finie.

En effet, on a, dans ce cas,

$$d Q = \frac{2 t r^2 \sqrt{\alpha r} . d z (\sin. z)^2 \sqrt{(1 - \cos. z)}}{6}.$$

Faisons $1 - \cos. z = y$; nous aurons $dz (\sin. z)^2 \sqrt{(1 - \cos. z)} = y d y \sqrt{(2 - y)}$, dont l'intégrale est $y \int d y \sqrt{(2 - y)} - \int d y \int d y \sqrt{(2 - y)}$

$$= - \frac{2 y (2 - y)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4 (2 - y)^{\frac{5}{2}}}{15} + C$$

$$= - \frac{2 (\sin. z)^2 \sqrt{(1 + \cos. z)}}{3} - \frac{4 (1 + \cos. z)^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$+ C$. En déterminant la constante C par la condition que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $z = 0$, et reçoive sa valeur complète, lorsque $z = 180$ degrés, on trouvera $\frac{32\, t r^2 \sqrt{(2 a r)}}{15\, \theta}$ pour l'expression de la quantité d'eau qui sort par le demi-orifice KMV, et par conséquent $\frac{64\, t r^2 \sqrt{(2 a r)}}{15\, \theta}$ pour l'expression de celle qui sort par l'orifice entier $KMVN$.

La hauteur moyenne de l'eau est exprimée par la fraction $\frac{1024 \times 2r}{225\, \Pi^2}$, qui est à-peu-près égale à $\frac{25}{27}\, r$. D'où l'on voit que cette hauteur est toujours moindre que la distance du centre de l'orifice à la surface de l'eau.

247. *Remarque II.* Il resteroit encore à donner une formule pour mesurer la dépense, lorsque la surface de l'eau est au-dessous du point K, et que par conséquent l'orifice est un segment de cercle. Mais je ne la donne pas, parce que dans les problêmes de cette espèce où la surface supérieure de l'eau n'est pas soutenue par la paroi à l'endroit de l'orifice, elle s'abaisse sensiblement vers le milieu; ce qui trouble le rapport naturel des vitesses, et empêche que la théorie ne puisse déterminer les écoulemens que d'une manière assez imparfaite.

248. *Scholie général.* Ces exemples suffisent, ce me semble, pour faire connoître la manière de dé-

terminer les écoulemens des fluides par une seule ouverture latérale, de vases entretenus constamment pleins. Quand un fluide sort par plusieurs ouvertures à la fois, et que ces ouvertures sont toujours supposées petites, l'écoulement se fait par chacune d'elles de la même manière que si elle étoit seule. Il n'y a donc à cet égard aucune nouvelle difficulté dans le problême. Seulement on doit observer qu'une petite overture placée dans le voisinage d'une plus grande, donne un peu moins à proportion que celle-ci. J'expliquerai cela en détail à l'aide de l'expérience.

249. Problême V. *Exposer en général la méthode de trouver l'expression du temps* t *que l'eau met à s'abaisser d'une certaine hauteur dans un vase, par une ouverture latérale dont tous les points ne peuvent pas être supposés à la même distance de la surface du fluide, le vase se vidant sans recevoir de nouvelle eau?*

Ayant supposé d'abord que l'eau se soit abaissée d'une hauteur indéterminée, je cherche par la méthode de l'article 224, la quantité de liqueur qui sortiroit, par l'orifice entier, pendant le temps élémentaire dt, si la surface de l'eau demeuroit toujours dans cette même position. La quantité dont il s'agit est toujours de cette forme $F \times dt$, F étant une fonction donnée de l'orifice et de la hauteur actuelle de la surface de l'eau au-dessus d'un point donné du même orifice. Ensuite je suppose que la surface de l'eau s'abaisse, pendant l'élément du

temps, d'une hauteur infiniment petite, en sorte qu'il s'écoule une quantité d'eau, qui est égale au produit de la surface du fluide par la petite hauteur dont elle s'est abaissée, et qui a par conséquent pour valeur $X dx$; X étant la surface du fluide, quantité donnée par la figure du vase, dx la hauteur élémentaire dont cette surface s'abaisse. On aura donc l'équation $F dt = X dx$, ou $dt = \frac{X dx}{F}$. Il ne s'agira plus que de substituer pour F et X leurs valeurs données dans chaque cas particulier, et puis d'intégrer.

Montrons, par un exemple, l'usage de cette formule.

250. Problême VI. *Trouver le temps que la surface de l'eau met à s'abaisser d'une hauteur proposée, dans un vase prismatique vertical, par un orifice rectangulaire vertical pratiqué à l'une de ses parois?*

En nommant A l'aire de la base du vase; f le côté horizontal de l'orifice; b son côté vertical; x la hauteur variable du fluide au-dessus de la base inférieure et horizontale de l'orifice; θ le temps de la chute par la hauteur a : on aura (238),

$$-A\, dx = \frac{4 f dt . \sqrt{a} . [x^{\frac{3}{2}} - (x-b)^{\frac{3}{2}}]}{3\theta};$$

j'écris $-dx$, parce que t augmentant, x diminue. De-là on tire $dt = \frac{-3\theta A\, dx}{4 f \sqrt{a} . [x^{\frac{3}{2}} - (x-b)^{\frac{3}{2}}]}$;

et la question est d'intégrer $\frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}-(x-b)^{\frac{3}{2}}}$.

Or, pour cela, je multiplie haut et bas, par $x^{\frac{3}{2}}+(x-b)^{\frac{3}{2}}$; ce qui donne $\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3}$ $+\frac{(x-b)^{\frac{3}{2}}dx}{3bx^2-3b^2x+b^3}$. Alors la première partie devient rationnelle, en faisant $x=y^2$; et la seconde devient aussi rationnelle, en faisant $x-b=z^2$: elles sont donc intégrables l'une et l'autre par les méthodes d'intégration pour les fractions rationnelles. Nos lecteurs acheveront le calcul.

On voit que dans cet exemple, quoique fort simple, l'expression du temps est un peu compliquée. Quelquefois la valeur du temps est affectée de deux signes d'intégration, et aucune des intégrales ne peut se trouver algébriquement. Mais le problême est toujours soluble par la méthode des quadratures ou des séries.



CHAPITRE IV.

De l'écoulement d'un fluide par un orifice horizontal quelconque, en supposant que les tranches conservent leur parallélisme, et que tous les points d'une même tranche s'abaissent avec la même vitesse.

251. Nous avons déjà indiqué (210) cette double hypothèse : nous ajouterons ici que la première partie semble être une suite nécessaire de l'expérience, qui apprend que la surface supérieure du fluide demeure toujours horizontale. Car, puisque la première tranche conserve son parallélisme, il semble que la continuité du fluide et la force d'adhérence réciproque de tous ses points, demandent que de proche en proche toutes les autres tranches s'abaissent parallèlement à elles-mêmes. D'ailleurs les mêmes causes qui tendent à entretenir le parallélisme de la première tranche paroissent devoir agir sur les tranches intérieures, et y produire les mêmes effets, du moins à-peu-près. Quant à la seconde partie de la même hypothèse, elle ne peut pas être rigoureusement exacte, lorsque le vase n'est pas prismatique et vertical. Car les particules contiguës aux parois doivent nécessairement en suivre la direction. Or, si ces mouvemens ne sont pas

pas verticaux, ils doivent produire quelques altérations dans le mouvement vertical des particules voisines. Mais comme le nombre des particules d'une tranche qui touchent les parois, est infiniment petit par rapport au nombre des autres particules de la même tranche, on peut supposer légitimement, ou sans craindre d'erreur sensible, que les altérations dont nous venons de parler sont comme nulles, et que tous les points d'une même tranche ont la même vîtesse verticale.

Voilà à-peu-près les raisons sur lesquelles on établit la double hypothèse proposée. Elles sont certainement très-admissibles pour la partie supérieure du vase. Il n'en est pas tout-à-fait de même pour celle qui avoisine l'orifice. Car dans cette dernière partie les points fluides se dirigent de tous côtés vers l'orifice suivant des mouvemens obliques; et on ne peut pas supposer que les mêmes particules individuelles forment une même tranche horizontale, dont tous les points s'abaissent verticalement. Ainsi il est impossible que l'écoulement déterminé suivant l'hypothèse dont il est question, puisse être exactement conforme à l'expérience. Mais on sent d'un autre côté que les erreurs de la théorie doivent suivre, du moins à-peu-près, la même loi dans tous les cas. Si l'on a donc soin de constater ces erreurs par quelques expériences, et de dresser en conséquence des petites tables de correction, rien n'empêchera d'appliquer cette théorie à la pratique, en faisant dans chaque cas particulier la correction

dont il a besoin. Avec une telle restriction, j'adopte ici la même théorie, parce que tout bien pesé, il me paroît très-difficile d'imaginer d'autres moyens plus propres à représenter, au moins sensiblement, le mouvement des fluides, par des formules qu'on puisse appliquer à la pratique.

252. Problème I. *Trouver en général une équation entre la hauteur d'un fluide soumis à l'action de la pesanteur, dans un vase, et la vitesse au sortir d'un orifice horizontal de grandeur quelconque ?*

Imaginons que le fluide proposé $ABCD$ (*Fig.* 11) soit partagé en une infinité de tranches horizontales et égales $ADda$, $TVut$, etc. qui s'abaissent parallèlement à elles-mêmes, et dont chacune a la même vitesse verticale dans toute sa largeur. Toutes ces tranches agissent les unes sur les autres dans toute l'étendue de la hauteur Rq, soit en se poussant, soit en s'entraînant; en sorte que si la vitesse des unes est retardée d'un instant à l'autre, la vitesse des autres est accélérée. Il en est à cet égard du mouvement des particules fluides comme de celui de plusieurs corps solides, formant un même système, dont aucun ne peut se mouvoir sans agir sur les autres et sans éprouver leur réaction. Ces efforts réciproques se combinent tellement entr'eux, que si quelques corps perdent du mouvement, les autres en gagnent en conséquence, et que la somme de toutes ces variations, est nécessairement zéro.

Soient
- la gravité .... $= g$,
- la hauteur donnée $R q$ .... $= h$,
- l'aire de l'orifice $p q$ .... $= K$,
- l'aire exprimée par la ligne AD, et qui est une fonction de $R q$, donnée par la figure du vase .... $= M$,
- la hauteur indéterminée $R H$ .... $= x$,
- l'aire exprimée par TV, fonction donnée de x .... $= y$,
- la vîtesse de la tranche qui sort de l'orifice .... $= u$,
- la vîtesse de la tranche $T V u t$ .... $= v$,
- le temps .... $= t$.

Supposons que dans l'instant dt la vîtesse v devienne $v + dv$, (dv pouvant être positive ou négative). Il est clair que si les tranches n'agissoient point les unes sur les autres, la vîtesse v, à la fin de l'instant dt, deviendroit $v + g dt$. Ainsi, puisqu'elle devient $v + dv$, et que $v + g dt = v + g dt + dv - dv$, on voit que le fluide resteroit en équilibre si chaque tranche n'étoit animée que de la vîtesse $g dt - dv$. Ces sortes de vîtesses qui se détruisent mutuellement et qui varient d'une tranche à l'autre, sont les unes positives, les autres négatives; et on a par conséquent, sur toute l'étendue de la hauteur Rq, $\int dx (g dt - dv) = 0$; ou (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$), $\int \frac{g dx^2}{v}$ $- \int dx dv = 0$. Substituant pour v sa valeur $\frac{K u}{y}$,

pour dv sa valeur $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{y^2}$; nous aurons

$$\int \frac{gy\,dx^2}{Ku} - \int \frac{K\,dx\,(y\,du - u\,dy)}{yy} = 0.$$

Cela posé, comme l'intégrale doit être prise relativement à la hauteur Rq; et que par conséquent u et du doivent, pour le moment, être regardées comme constantes; que de plus $y\,dx$ est une quantité constante : nous pouvons mettre notre équation sous cette forme, $\frac{g \cdot y\,dx}{Ku} \int dx - K\,du \int \frac{dx}{y} + K\,u\,y\,dx \int \frac{dy}{y^3} = 0$.

Or, $\int dx$ devient h; $\int \frac{dx}{y}$ (en suppléant convenablement les homogènes) peut représenter l'aire, que je nomme N, d'une courbe construite sur l'axe Rq, et dont les ordonnées sont réciproquement proportionnelles aux différentes sections du réservoir qui répondent aux différens points de Rq; $\int \frac{dy}{y^3}$ représente l'aire d'une courbe qui doit s'évanouir quand $y = AD = M$ et recevoir sa valeur complète quand $y = K$, et partant cette aire $= \frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2}$. De plus $y\,dx = AD\,da = M \times Rr$. Donc l'équation deviendra $2gh \,.\, M^2 \times Rr - 2K^2 \,.\, M \,.\, N \,.\, u\,du + uu \times Rr(K^2 - M^2) = 0$; ou (en nommant s la hauteur dûe à la vitesse u, ce qui donne $uu = 2gs$),

(A). $h \cdot M^2 \times Rr - K^2 \cdot M \cdot N ds + s \times Rr \times (K^2 - M^2) = 0$;

équation demandée, qui nous sera fort utile.

253. *Corollaire.* On voit d'abord que si l'orifice K peut être supposé infiniment petit par rapport aux amplitudes du vase, cette équation devient (en négligeant les termes qui contiennent K), $h M^2 \times Rr - M^2 s \times Rr = 0$, ou $s = h$. D'où il suit qu'à chaque instant la vitesse au sortir de l'orifice est dûe à la hauteur h du fluide au-dessus de l'orifice, comme nous l'avons trouvé (218).

254. Problême II. *Déterminer les quantités relatives à l'écoulement, pour un vase entretenu constamment plein ?*

Supposons que notre vase $ABCD$, soit entretenu constamment plein à la hauteur Rq ; et imaginons qu'à mesure que la surface AD s'abaisse dans un instant en ad, et qu'il sort par conséquent une petite quantité de liqueur, égale à $AD \times Rr$, imaginons, dis-je, que la tranche $ADda$ est remplacée par une autre qui est, pour ainsi dire, créée en sa place, et qui a la même vitesse qu'elle. Que le produit $K \times z$, de l'orifice K par la ligne z représente la quantité de liqueur qui sort pendant le temps t. Il est clair qu'on aura $K dz = M \times Rr$. Par conséquent l'équation (A) deviendra ici,

$h M^2 dz - K \cdot M^2 N ds + (K^2 - M^2) s dz = 0$;

où il n'y a que z et s de variables.

Il est facile d'intégrer cette équation; car si l'on

fait, pour abréger le calcul, $\frac{h}{K.N} = b$, $\frac{M^2 - K^2}{K.M^2N} = f$, on aura $ds + fs\,dz = b\,dz$; ou, $dz = \frac{ds}{b - fs}$, dont l'intégrale est $z = -\frac{1}{f} L.(b - fs) + C$, c'est-à-dire (en déterminant la constante C de manière que $s = 0$ donne $z = 0$), $z = \frac{1}{f} L.\left(\frac{b}{b - fs}\right)$. Cette équation donne en nommant c le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, et repassant aux nombres), $s = \frac{b}{f}\left(1 - c^{-fz}\right)$. On a donc en termes finis la relation entre la hauteur s dûe à la vîtesse au sortir de l'orifice et l'espace z parcouru par le fluide à sa sortie. Par conséquent on connoîtra la quantité Kz de liqueur écoulée pour la hauteur s.

Si on veut avoir de même la relation entre le temps t et la hauteur s, on observera que $dt = \frac{dz}{u} = \frac{ds}{(b - fs)\sqrt{2gs}}$. Faisons $s = y^2$, $\frac{b}{f} = m^2$: nous aurons $dt = \frac{2}{f\sqrt{2g}} \times \frac{dy}{m^2 - y^2} = \frac{1}{fm\sqrt{2g}}\left(\frac{dy}{m + y} + \frac{dy}{m - y}\right)$, dont l'intégrale est $t = A + \frac{1}{fm\sqrt{2g}} \times L.\left(\frac{m + y}{m - y}\right) = A + \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}.\sqrt{2g}} \times$

$L.\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-\sqrt{fs}}\right)$. Donc la constante A est zéro, parce que t et s sont zéro en même temps. Ainsi $t = \frac{\sqrt{f}}{f\sqrt{b}\sqrt{2g}} \times L.\left(\frac{\sqrt{b}+\sqrt{fs}}{\sqrt{b}-\sqrt{fs}}\right)$. On pourra comparer ce temps à celui θ qu'un corps grave met à tomber de la hauteur α; car on a $\theta = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{2g}}$.

La relation entre t et z se trouvera en mettant dans l'équation $dt = \frac{dz}{x}$ pour u sa valeur $\sqrt{2gs}$, ensuite pour s sa valeur en z, trouvée ci-dessus : par-là on aura, $dt = \frac{dz}{\sqrt{\frac{2bg}{f}}.\sqrt{[1-c^{-fz}]}}$.

Soit $c^{-fz} = y$, et par conséquent $dz = -\frac{dy}{fy}$; on aura la tranformée, $dt = -\frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dy}{y\sqrt{[1-y]}}$, ou (en faisant $1-y = xx$), $dt = \frac{2}{\sqrt{(2bgf)}} \times \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times \left(\frac{dx}{1+x} + \frac{dx}{1-x}\right)$, dont l'intégrale est $t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times [\log.(1+x) - \log.(1-x)]$, ou bien (en chassant x), $t = \frac{1}{\sqrt{(2bgf)}} \times [L.(1+\sqrt{[1-c^{-fz}]}) - L.(1-\sqrt{[1-c^{-fz}]})]$.

Il ne faut point ajouter de constante, parce que $z = o$ donne $t = o$, comme cela doit être. Par le moyen de cette équation, on connoîtra la quantité d'eau qui s'écoule en un temps donné : car cette quantité $= K \times z$, qu'on peut exprimer maintenant en fonction du temps et de constantes.

(255.) *Remarque.* La manière dont nous avons imaginé (*art. précéd.*) que le vase $ABCD$ est entretenu constamment plein, a rarement lieu dans la pratique. Ordinairement la nouvelle tranche $ADda$, ajoutée à chaque instant pour réparer la dépense qui se fait par l'orifice pendant le même instant, est fournie par une affusion latérale, et elle reçoit sa vitesse de celle qui la précède en descendant et qui l'entraîne en vertu de la ténacité réciproque des parties du fluide. Alors il faut faire quelque changement à la méthode de l'article précédent, pour l'appliquer au cas dont il s'agit.

Soient V la vitesse de la tranche $ADda$; v la vitesse de la tranche indéterminée $TVut$; g la gravité; t le temps; $rH = x$. Si la tranche $ADda$ étoit livrée à l'action libre de la pesanteur, elle acquerroit dans l'instant dt la vitesse gdt. On pourra regarder cette vitesse gdt comme composée de la vitesse V et d'une autre $gdt - V$ qui doit être anéantie. Par conséquent si cette même vitesse $gdt - V$ existoit seule dans la tranche $ADda$ et si les autres tranches qui répondent à la hauteur rq étoient animées chacune de la vitesse $gdt - dv$, tout le système demeureroit en équili-

bre. On aura donc l'équation $Rr \times (g dt - V) + \int dx (g dt - dv) = 0$, qui devient (en négligeant $g dt$ par rapport à V, et faisant comme ci-dessus $AD = M$, $pq = K$, Rq ou $rq = h$),

$$-2 Rr \times K. M. V. u + 2 gh \times M^2 \times Rr - 2 K^2 \times M. N. u\, du + Rr \times u^2 \times (K^2 - M^2) = 0:$$

ou bien encore (en nommant $K \times z$ la quantité d'eau qui s'écoule pendant le temps t, s la hauteur dûe à la vitesse u, et considérant que $V = \frac{Ku}{M}$, $Rr = \frac{K dz}{M}$, $uu = 2gs$),

$$h M^2 dz - (K^2 + M^2) s\, dz - K. M^2 \times N ds = 0:$$

équation qui est de la même forme que celle de l'article précédent, et qui est par conséquent susceptible des mêmes calculs.

Lorsque l'orifice K peut être regardé comme infiniment petit, on a ici, comme dans la première hypothèse, $s = h$.

(256.) Problème III. *Trouver les quantités relatives à l'écoulement, pour un vase qui se vide sans recevoir de nouvelle eau?*

Supposons qu'au premier instant la surface du fluide soit en SX, et qu'au bout du temps t elle prenne la position indéterminée AD, la hauteur Rq étant ici variable. Il est clair que si en conservant d'ailleurs les autres dénominations de l'article 252, on fait $Rq = z$, et par conséquent Rr

$= - dz$, l'équation (A) s'appliquera ici, et deviendra,

$$M^2 z\,dz + K^2 M.N\,ds + s\,dz\,(K^2 - M^2) = 0.$$

Cette équation est réductible à la forme $ds + sP\,dz = Q\,dz$, P et Q étant des fonctions de z et de constantes. Pour l'intégrer, je multiplie tous ses termes par une fonction ϕ de z, telle que le premier membre devienne intégrable : le second le sera toujours, au moins par les quadratures, quelle que puisse être cette fonction. Nous aurons donc d'abord $\phi\,ds + \phi s P\,dz = \phi Q\,dz$. Ensuite supposons qu'on ait $\phi s = \int \phi Q\,dz$, et par conséquent $\phi\,ds + s\,d\phi = \phi Q\,dz$. En comparant ensemble les deux équations différentielles, terme à terme, nous aurons $s\,d\phi = \phi s P\,dz$, ou bien $\frac{d\phi}{\phi} = P\,dz$; et $L.\phi = \int P\,dz$. Donc en nommant c le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1, et repassant aux nombres, $\phi = c^{\int P dz}$. Substituant cette valeur de ϕ dans l'équation $\phi s = \int \phi\,Q\,dz$, nous aurons $s = c^{-\int P dz} \times \int Q c^{\int P dz}.\,dz$. On a donc la relation entre s et z.

Les relations entre toutes les quantités qui appartiennent au problême, se trouvent sans peine comme dans les cas précédens ; et la question se réduit toujours en général aux quadratures des courbes. Bornons-nous à l'examen d'un cas particulier.

257. Problème IV. *Déterminer l'écoulement, lorsque le vase qui se vide sans recevoir de nouvelle eau, est un cylindre vertical?*

Suivant nos dénominations, M représente la section constante et horizontale du cylindre; $N = \frac{z}{M}$. Ainsi l'équation générale de l'article précédent, devient

$$M^2 z dz + K^2 z ds - (M^2 - K^2) s dz = 0.$$

Soient, pour abréger le calcul, $\frac{M^2}{K^2} = m$, $\frac{M^2 - K^2}{K^2} = n$: nous aurons $z ds - n s dz + m z dz = 0$. Je multiplie tout par ϕ fonction de z; et supposant que l'on ait $\phi z s + \int \phi m z dz = A$, cette dernière équation donnera $\phi z ds + s(\phi dz + z d\phi) + \phi m z dz = 0$. Comparant terme à terme cette équation avec l'équation $\phi z ds - \phi n s dz + \phi m z dz = 0$, on aura $\phi dz + z d\phi = - \phi n dz$, ou $\frac{d\phi}{\phi} = -(n+1)\frac{dz}{z}$; donc $\phi = B z^{-(n+1)}$. L'équation $\phi z s + \int \phi m z dz = A$, deviendra donc $(1-n) \times s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, en nommant H la hauteur primitive et donnée du fluide, et déterminant la constante $\frac{A}{B}$ par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, ou qu'au premier instant la vitesse du fluide soit nulle.

Si, au premier instant le fluide avoit dans le cylindre, par quelque cause extérieure, une vitesse dûe à une hauteur donnée b, il faudroit déterminer la constante A par la condition que $z = H$, donnât $s = b \times \frac{M^2}{K^2}$. On aura donc toujours facilement s en fonction de z et de constantes.

On trouvera aussi sans peine la relation entre le temps et la vitesse, et la relation entre le temps et la hauteur z.

258. *Remarque I.* Lorsqu'on a $n=1$, ou $M^2=2K^2$, la formule de l'article précédent donne pour s une valeur indéterminée. Alors il faut remonter à l'équation différentielle $M^2 z\,dz + K^2 z\,ds - (M^2 - K^2) s\,dz = 0$, qui devient, $2z\,dz + z\,ds - s\,dz = 0$; ou bien $\frac{z\,ds - s\,dz}{z^2} = -\frac{2\,dz}{z}$ dont l'intégrale est $\frac{s}{z} = L.A - L.z^2$. Donc en déterminant la constante A par la condition que $z = H$ donne $s = 0$, on aura $s = z.L.\left(\frac{H^2}{z^2}\right)$

259. *Remarque II.* Nous ferons sur ce même problème une autre remarque qui s'applique, avec les changemens convenables, à toutes sortes de vases. Supposons que la surface de l'eau, immobile au premier instant dans le cylindre, s'abaisse de la très-petite hauteur q. On aura $z = H - q$, et (en négligeant le quarré et les plus hautes puissances de q), $z^{-n} = (H-q)^{-n} = H^{-n} + n H^{-n-1} q$,

$z^{1-n} = (H-q)^{1-n} = H^{1-n} - (1-n)$ $H^{-n} q$. Substituant ces valeurs dans l'équation générale $(1-n) s z^{-n} + m z^{1-n} = m H^{1-n}$, elle deviendra $Hs + nsq - mHq = 0$, ou bien $s = \frac{mHq}{H+nq}$, ou encore, en négligeant le second terme du dénominateur, $s = mq = q \times \frac{M^2}{K^2}$. D'où il suit que la hauteur dûe à la vîtesse de la surface de l'eau dans le cylindre, est exprimée par q. Cette surface descend donc dans les premiers instans du mouvement à la manière des corps qui tombent librement par la pesanteur, ou comme s'il n'y avoit pas de fond dans le cylindre et que le fluide tombât tout d'une pièce.

De-là on a tiré une objection contre l'hypothèse du parallélisme des tranches. Il est impossible, dit-on, que le fluide sortant par l'ouverture pq moindre que le fond BC puisse jamais descendre de la même manière que si ce fond ne lui faisoit aucun obstacle. A cela, on peut répondre que l'objection seroit sans réplique, si sur la hauteur entière Oq du cylindre les vîtesses des différentes tranches étoient égales entr'elles Mais en supposant qu'à une petite distance du fond les particules se dirigent vers l'orifice suivant des mouvemens obliques Mp, Nq, et regardant les portions de fluide MpB, NqC comme stagnantes; les particules qui répondent à l'espace $pMNq$ se mouvront plus vite que celles

de la partie supérieure *SMNX* du cylindre; et conséquemment il pourra se faire que la surface de l'eau descende, pendant les premiers instans, à-peu-près comme un corps pesant et libre. L'expérience doit seule décider entre ces deux opinions. Or, elle apprend qu'il n'y a pas de portion de fluide qui soit rigoureusement stagnante, et que toutes les particules ont une tendance marquée vers l'orifice; mais que celles qui sont dans le voisinage du trou ont des mouvemens plus rapides que les autres. Il paroît donc que dans cette partie inférieure du vase l'hypothèse du parallélisme des tranches n'a pas lieu; mais elle est sensiblement vraie dans toute la partie supérieure. D'ailleurs, quand même elle détermineroit l'écoulement d'une manière erronée pour un temps qui est comme infiniment petit, il ne s'ensuit point qu'elle ne soit pas propre à représenter d'une manière très-approchée les écoulemens qui répondent à des temps finis, ou que du moins on n'en puisse tirer, à peu de chose près, les rapports de différens écoulemens. Car si les erreurs auxquelles elle est sujette suivent toujours la même marche, il pourra se faire que les écoulemens naturels et physiques soient entr'eux comme les écoulemens déterminés par la méthode dont il s'agit.

260. Problême V. *Trouver le mouvement d'une quantité déterminée de fluide pesant ou non, qui se meut dans un vase, soit en vertu de la seule pesanteur, soit en vertu d'une impulsion primitive*

donnée au fluide, soit par l'action de ces deux forces à la fois ?

L'équation générale de l'article 252, va nous donner la solution de ce problême. Conservant donc la même *Figure* et les mêmes dénominations, concevons d'abord que le fond BC soit anéanti, ou qu'on ait $K = BC$, pour permettre au fluide de couler le long du vase, suivant la loi de continuité. Supposons ensuite que la portion donnée de fluide occupe, au premier instant, l'espace $SZKX$, et qu'à la fin du temps t elle soit parvenue dans la position indéterminée $ABCD$. Il est clair qu'en nommant z l'espace OR parcouru verticalement par la surface du fluide, les quantités M, K, N, h seront des fonctions données de z et de constantes, puisque la figure du vase est donnée, et que les deux espaces $SZKX$, $ABCD$, sont égaux entr'eux. L'équation qui représente le mouvement du fluide sera donc toujours de cette forme, $Z\,dz + AZ'\,ds + Bs\,Z''\,dz = 0$; Z, Z', Z'' étant des fonctions de z; A, B, des quantités constantes : et on intégrera cette équation par la méthode de l'article 256. Il faudra que l'intégrale soit telle que la vitesse initiale d'une tranche donnée du fluide soit donnée.

Quand le fluide n'a pas de pesanteur, le premier terme de l'équation, qui est relatif à cette force, s'évanouit ; et l'équation devient fort simple.

Connoissant la relation entre s et z, on trouvera facilement t en s ou en z.

On voit que ce problème peut servir à déterminer le mouvement de l'eau qui coule dans de longs tuyaux abstraction faite de tout frottement.

261. Problème VI. *Déterminer la pression qu'un fluide coulant dans un vase ou dans un tuyau, exerce contre ses parois?*

Nous tirons encore de l'article 252 la solution de ce problème. Reprenons donc l'hypothèse, la construction et les dénominations de cet article. La vitesse avec laquelle chaque tranche devroit tendre à se mouvoir pour demeurer en équilibre, étant $g\,dt - dv$, et par conséquent la force correspondante de la même tranche étant $g - \frac{dv}{dt}$, on voit qu'en vertu de ces forces $g - \frac{dv}{dt}$, les tranches se pressent les unes les autres, de la même manière que dans un fluide pesant et en repos dans un vase les tranches se pressent les unes les autres en vertu de la pesanteur. Donc à la profondeur $RH\,(x)$, la pression de chaque point de la tranche $TVut$ est exprimée par $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right)$. Cette force qui se transmet en tous sens, agit perpendiculairement contre les parois Tt, Vu. Or, $\int dx\left(g - \frac{dv}{dt}\right) = g \times RH - \int \frac{dx\,dv}{dt}$. Mettant pour dv sa valeur $\frac{K(y\,du - u\,dy)}{yy}$, on aura $\int \frac{dx\,dv}{dt} = \frac{K\,du}{dt}\int \frac{dx}{y} - \frac{Kuy\,dx}{dt}\int \frac{dy}{y^3}$.

Les

Les intégrations indiquées, doivent être effectuées de manière que l'aire représentée par $\int \frac{dx}{y}$ et que je nomme Q, réponde à RH; et que $\int \frac{dy}{y^3}$ s'évanouisse lorsque $y = AD$, et reçoive sa valeur complète lorsque $y = TV = H$. Ainsi en mettant pour $y\,dx$ sa valeur $M \times Rr$, on trouvera que la pression $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt}\right)$, qui répond à la hauteur $RH = g \times RH - \frac{K \cdot Q\,du}{dt} + \frac{Ku \times Rr \times (H^2 - M^2)}{2\,dt \cdot H^2 M}$, expression dans laquelle on substituera dans chaque cas, pour u et dt leurs valeurs.

Si la valeur de la pression, pour quelqu'endroit du vase, étoit négative, cela signifieroit qu'en cet endroit les tranches n'agiroient pas les unes sur les autres, et que par conséquent le fluide n'y formeroit pas une masse continue, ou se détacheroit par parties.

262. Problème VII. *Trouver, par les mêmes principes, la force qu'il faut employer pour soutenir un vase qui donne de l'eau par l'ouverture* p q?

La force cherchée est égale à la somme des produits de chaque tranche multipliée par la force en vertu de laquelle la même tranche demeureroit en équilibre, par la même raison que la force requise pour soutenir l'effort d'un fluide pesant et en repos

dans un vase est égale à la somme des produits de chaque tranche multipliée par la pesanteur. Ainsi elle a pour valeur, $\int y\,dx\left(g-\frac{dv}{dt}\right)=\int gy\,dx - \int \frac{y\,dx\,dv}{dt}$. La première partie est le poids même du fluide; la seconde se trouve sans peine par ce qui précède.

263. *Scholie général.* On voit par la théorie générale que nous venons d'exposer, que dans l'hypothèse du parallélisme des tranches, on détermine d'une manière assez simple tout ce qui est relatif à l'écoulement des fluides qui sortent, par des ouvertures horizontales, des vases où ils sont contenus. La même théorie s'applique également à la recherche du mouvement des fluides dans de longs tuyaux inclinés, quelques sinuosités qu'ils puissent avoir dans le sens de leur longueur, pourvu néanmoins que leur courbure ne varie pas trop brusquement d'un point à l'autre. Il est indifférent, quant à la facilité du calcul, de supposer alors, ou que les tranches sont horizontales, ou qu'elles sont perpendiculaires aux parois du tuyau en chaque endroit. En comparant avec l'expérience les résultats des calculs dans les deux suppositions, on verra laquelle mérite la préférence. Je n'ai pas besoin d'ajouter que dans la seconde, les tranches ne sont parallèles entr'elles que de proche en proche et sur chacun des élémens de la longueur du tuyau.

A l'égard des vases qui donnent de l'eau par de

grandes ouvertures latérales, leurs écoulemens ne peuvent pas être déterminés par la méthode du parallélisme des tranches. Car lorsque les particules contenues dans le vase sont arrivées aux environs de l'orifice, elles se détournent de la verticale, et prennent des directions plus ou moins courbes, tendantes au même orifice. De plus, à leur sortie, elles n'ont pas la même vitesse; les plus éloignées de la surface du fluide se meuvent nécessairement plus vîte que les autres. Il n'y a donc pas alors d'autre méthode simple et commode pour déterminer l'écoulement, que celle du chapitre précédent; mais il faut pour cela que l'orifice soit petit en comparaison des amplitudes du vase, comme nous l'avons déjà observé.

CHAPITRE V.

Méthodes plus exactes que les précédentes, pour déterminer le mouvement d'un fluide qui coule dans un vase.

264. L'HYPOTHÈSE du mouvement parallèle des particules fluides étant sujette à plusieurs difficultés que nous avons rapportées, avec les explications que l'on donne pour les résoudre, ou du moins pour les atténuer, les Géomètres ont cherché d'autres moyens analytiques plus exacts pour représenter

le mouvement des fluides. D'Alembert a fait voir depuis long-temps qu'on pouvoit appliquer immédiatement à cette recherche le principe d'égalité de pression (*Résistance des fluides*, 1752; *Opuscules Math. tome I.er et V*). Euler a traité depuis la même matière avec une profondeur et une abondance qui, dans l'état où l'analyse se trouve aujourd'hui, ne permettent guère d'aller plus loin, sans envisager le problème sous un point de vue un peu différent (*Acad. de Berlin*, 1755; *Acad. de Pétersbourg*, 1768, 1769, 1770, 1771). Malheureusement toutes ces formules n'offrent, pour ainsi dire, que des vérités spéculatives; et quand on veut en faire des applications physiques, il faut tellement les simplifier ou les dénaturer par différentes suppositions, qu'il auroit peut-être autant valu établir d'abord le calcul sur des principes moins rigoureux. C'est ce qui a déterminé d'Alembert à proposer (*Op. Math. tome VI*, 1773; *et VIII*, 1782), une nouvelle méthode plus simple, susceptible d'une grande exactitude, et dont les élémens peuvent être vérifiés facilement par l'expérience. Il se contente de supposer que la surface d'un fluide qui coule dans un vase demeure toujours horizontale, ce qui est conforme à l'expérience, du moins lorsque l'orifice n'est pas très-grand relativement aux dimensions du vase; ensuite, il imagine, comme il l'avoit déjà fait dans le tome I.er de ses *Opuscules Math.* publié en 1761, que le fluide soit partagé en une infinité de tuyaux infiniment étroits qui,

partant de la surface supérieure, viennent se terminer à la surface inférieure ou à l'orifice, par une direction plus ou moins oblique, selon qu'ils sont plus ou moins éloignés du centre de l'orifice, de manière que la direction du filet central est évidemment une simple ligne droite verticale.

Dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1781, M. de la Grange qui avoit déjà appliqué (*Acad. de Turin*, 1762), avec le plus grand succès, au mouvement des fluides, un principe de Dynamique, fondé sur la méthode *de maximis et minimis*, a fait de nouveaux efforts dignes de son génie, pour perfectionner la théorie générale du mouvement des fluides, et sur-tout les moyens de l'appliquer à des questions particulières.

On trouvera dans les deux problèmes suivans la substance, ou une idée générale des travaux de ces grands Géomètres, sur une matière si importante. Je commence par celui qui a le plus de rapport avec ce qui précède.

265. Problème I. *Déterminer l'écoulement d'un fluide par l'orifice d'un vase, dans l'hypothèse que la surface du fluide demeure toujours horizontale, et que les particules se meuvent dans des tuyaux fictifs depuis la surface jusqu'à l'orifice?*

La surface *AD* du fluide (*Fig.* 12) demeurant toujours horizontale, il est évident que si l'on parvient à connoître la vitesse avec laquelle l'un quelconque de ses points s'abaisse à chaque instant, on connoîtra aussi la quantité élémentaire d'eau qui

sort pendant cet instant par l'orifice, puisqu'elle est égale au produit de la surface par le petit espace que parcourt l'un des points de cette même surface. Nous allons donc chercher le mouvement élémentaire du point R qui répond verticalement au centre H de l'orifice pq. De-là on trouvera, par l'intégration, la quantité d'eau qui sort par l'orifice, pendant un temps fini.

Considérons la ligne verticale RH comme l'axe d'un tuyau infiniment étroit $RSMNH$, dans lequel toutes les particules voisines du filet central RH, se meuvent de la même manière que si ce tuyau formoit un vase isolé. Nous regarderons, pour la plus grande généralité, la figure du tuyau comme variable d'un instant à l'autre, de sorte que cette figure étant $RSMNH$ au commencement d'un instant, elle devient $rsmnH$ à la fin de cet instant. Imaginons que tout le fluide contenu dans ce canal soit partagé en une infinité de tranches horizontales, d'un même volume. Puisque tous les points du filet central RH s'abaissent verticalement, il est clair que toutes les tranches dont il s'agit, peuvent être supposées s'abaisser aussi verticalement, avec des vîtesses qui sont réciproquement proportionnelles à leurs largeurs. La méthode de l'article 252 pourra donc être employée ici pour déterminer la vîtesse de l'une quelconque des tranches, et par conséquent aussi la vîtesse de la surface RS, ou du point R.

Soient {
la gravité.......................... $= g$,
la hauteur entière RH du fluide..... $= h$,
la hauteur variable RP............. $= x$,
la tranche première RS du tuyau primitif. $= R$,
la tranche dernière HN............. $= H$,
la tranche dernière Hn du tuyau varié $rsmnH$....................... $= m$,
la vitesse de cette tranche Hn....... $= u$,
la tranche indéterminée Pm......... $= y$,
la vitesse de cette tranche.......... $= v$,
l'élément du temps................... $= dt$,
l'espace élémentaire dont le point R s'abaisse........................ $= dz$.

En appliquant ici le raisonnement de l'article 252 déjà cité, on aura, pour la hauteur entière RH, l'équation, $\int dx\,(g\,dt - dv) = 0$; ou bien, $g\,dt\int dx - \int dx\,dv = 0$. Or, $\int dx = h$; $v = \frac{um}{y}$, et $dv = d\left(\frac{um}{y}\right)$; donc, en supposant qu'à cause de la variabilité du tuyau, m devienne $m + \delta m$; que x étant constante, y devienne $y + dy$; et que x devenant $x + dx$, y devienne $y + dy + \delta y$: on aura $d\left(\frac{un}{y}\right)$

$$= \left[\frac{(u + du)(m + \delta m)}{y + dy + \delta y}\right] - \left(\frac{um}{y}\right)$$

$$= \frac{m\,du + u\,\delta m}{y} - \frac{mu\,(dy + \delta y)}{y^2}.$$

Substituons cette valeur de dv dans l'équation $g\,dt\int dx - \int dx\,dv = 0$, ou $hg\,dt - \int dx\,dv = 0$; mettons aussi pour dt sa valeur qu'on voit

être $\frac{R\,dz}{mu}$, puisque la tranche supérieure R s'abaisse avec une vîtesse $= \frac{mu}{R}$; enfin, considérons que toutes les intégrales indiquées doivent être prises de manière que les seules quantités dépendantes de x et de y sont variables, et que les autres doivent être regardées, dans ce calcul, comme constantes. Par-là nous obtiendrons (en observant encore que l'expression $y\,dx$ d'une tranche quelconque est supposée constante), $\frac{ghR\,dz}{mu} - (m\,du + u\,\delta m)$
$\int \frac{dx}{y} + muy\,dx \int \frac{dy}{y^3} + mu \int \frac{dx \,.\, \delta y}{y^2} = 0.$
Nommons N l'intégrale $\int \frac{dx}{y}$ pour la hauteur entière h; effectuons l'intégration $\int \frac{dy}{y^3}$, de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $y = R$, et reçoive sa valeur complète lorsque $y = H$; substituons pour $y\,dx$ sa valeur $R\,dz$; et $2\,g\,s$ pour u^2, s étant la hauteur dûe à la vîtesse u: nous aurons, $hR\,dz - m^2 N\,ds - 2\,m N s\,\delta m$
$+ m^2\,s\,R\,dz \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{H^2} \right) + 2\,m^2 s$
$\int \frac{dx \,.\, \delta y}{y^2} = 0.$

Pour faire disparoitre le terme qui contient δm, ce qui simplifiera le calcul, soit Δy une variation de y, telle que l'on ait $m \,.\, \Delta y = m\,\delta y - y\,\delta m$, ou $\delta y = \frac{y\,\delta m}{m} + \Delta y$: l'équation précédente se changera en celle-ci.

(A). $h\,R\,dz - m^2\,N\,ds + m^2\,s\,R\,dz \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{H^2}\right) + 2\,m^2\,s \int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2} = 0.$

Dans cette équation, $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2}$ représente l'aire d'une courbe dont l'abscisse est x, l'ordonnée $\frac{\Delta y}{y^2}$, laquelle répond à l'axe entier RH et ne forme qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. La nature de la courbe SMN qui termine le tuyau fictif initial, et la variation Δy de l'ordonnée y, doivent être vérifiées par un nombre suffisant d'expériences. Alors on pourra faire de l'équation (A) des usages analogues à ceux qu'on a faits de l'équation pareille de l'article 252.

266. *Corollaire I.* Supposons, pour éclaircir ce que nous venons de dire, par une application, que le vase se vide sans recevoir de nouvelle eau, et que la base inférieure H du tuyau fictif initial soit très-petite par rapport à la base supérieure R; supposons de plus que la tranche m, qui est regardée comme constante dans l'équation (A) soit égale à H. Alors, en nommant q la hauteur variable RH, ce qui donne $dz = -dq$; et négligeant tous les termes qui contiennent H^2, excepté toutefois le dernier qu'on verra tout-à-l'heure pouvoir être conservé : l'équation (A) deviendra simplement, $-q + s + \frac{2\,H^2\,s}{R\,dq} \int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2} = 0.$

Cela posé, si on avoit $s = q$, c'est-à-dire si la vîtesse au sortir de l'orifice H, étoit dûe à la hauteur entière du fluide dans le vase, le dernier terme de notre équation seroit zéro. Mais s'il y a quelque différence entre s et q, (l'expérience semble en effet prouver que s est un peu moindre que q), le terme dont il s'agit, qui n'est plus zéro, sert à expliquer cette différence. Or, on peut attribuer à ce terme différentes valeurs, telles que l'intégrale $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2\, dq}$ soit comparable à l'intégrale $\int \frac{dy}{y^3}$ qui, dans le cas présent, est $-\frac{1}{2H^2}$. Car soit, par exemple, $y = a + p$, et $dy = dp$; $\Delta y = \frac{p^n\, dq}{(a+p)^r}$; $dx = \frac{A\, dp}{p^r\,(a+p)^k}$: il est clair que les deux différentielles $\frac{dy}{y^3}$ et $\frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2\, dq}$, c'est-à-dire, $\frac{dp}{(a+p)^3}$ et $\frac{A\, p^{n-r}\, dp}{(a+p)^{k+r+2}}$, seront comparables entr'elles, en prenant convenablement les exposans n, k, r. Il pourra même se faire que la seconde soit beaucoup plus grande que la première. On trouvera des résultats analogues pour une infinité d'autres suppositions sur les valeurs de y, Δy, dx.

267. *Corollaire II.* Dans l'hypothèse du parallélisme des tranches sur toute la largeur du vase, la valeur de la pression en chaque point des parois est (261), $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt} \right)$: ici la pression pour

chaque point du tuyau fictif $RSMNH$ a semblablement pour valeur $\int dx \left(g - \frac{dv}{dt} \right)$; mais comme le dv n'est pas le même dans les deux cas, les pressions ne sont pas non plus les mêmes. La quantité $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2}$, qui affecte maintenant la vîtesse, affecte aussi la pression ; et cette altération se communique de proche en proche jusques aux parois du vase. De-là, en examinant par la voie de l'expérience, la vîtesse avec laquelle le fluide sortiroit par une petite ouverture faite aux parois, on pourroit tirer de nouvelles lumières sur la valeur de la quantité $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2}$.

268. *Remarque.* Lorsque le vase $ABCD$ a une largeur finie, l'ordonnée y du tuyau fictif $RSMNH$ peut être très-différente de l'ordonnée correspondante du vase ; et le terme qui dans l'équation (A) contient $\int \frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2}$, peut être très-comparable aux autres. Mais si le vase est infiniment étroit, la vîtesse de tous les points d'une même tranche est à peu-près la même ; l'ordonnée du tuyau fictif est à très-peu de chose près l'ordonnée même du vase ; le δy et le Δy sont infiniment petits par rapport à dy. D'où il résulte que dans le cas présent, la quantité $\frac{dx \,.\, \Delta y}{y^2}$ sera infiniment plus petite par rapport à

$\frac{dy}{y^3}$, que lorsque la largeur du vase est supposée finie.

Toute cette théorie porte, comme on voit, sur des élémens qui doivent être donnés par des expériences variées et répétées de plusieurs manières : expériences nullement difficiles à imaginer et à exécuter.

269. Problême II. *Déterminer par le principe d'égalité de pression, le mouvement d'un fluide qui coule dans un vase?*

La solution générale de ce problême dépend de plusieurs considérations que nous allons exposer successivement.

I. Quelles que soient les forces dont une masse fluide en équilibre puisse être animée, nous avons vu (198, n°. 4), que si l'on conçoit dans cette masse un canal de figure quelconque, rentrant en lui-même, la liqueur contenue dans ce canal sera en équilibre indépendamment du reste de la masse : c'est-à-dire, que si l'on imagine que le reste du fluide se durcisse sans pouvoir changer de place, ni de volume, il y aura équilibre dans le canal, comme auparavant. Rien n'est, en effet, plus évident. Car le fluide contenu dans le canal demeure toujours dans le même état de compression, et chacune de ses particules est toujours également pressée en tout sens; il n'y a par conséquent aucune raison pour que l'équilibre se rompe.

II. En conséquence de cette loi, considérons dans

un fluide en équilibre (*Figure* 13) quatre points, M, N, K, H, pris où l'on voudra, mais situés dans un même plan, et formant entr'eux un canal rectangulaire $MNKH$. Ce canal sera en équilibre. Ayant choisi à volonté le point fixe E, et ayant mené, pour le point M, les coordonnées rectangles $EP = x$, $PM = y$, l'une parallèle à MH, l'autre à MN, supposons que toutes les forces auxquelles les particules du fluide sont soumises, agissent dans le plan EPM, et que par conséquent chacune d'elles soit réductible à deux autres, l'une parallèle à EP, l'autre à PM. Nommons P et P' les forces qui poussent les points M et N parallèlement à EP; Q et Q' les forces qui poussent les points M et H parallèlement à PM; et que ces différentes forces soient des fonctions de x, de y, et d'un temps t écoulé depuis une certaine époque. De plus, faisons $MH = \delta x$, $MN = \delta y$. Ces différentielles δx, δy sont relatives au changement qui arrive lorsqu'on passe de la considération du point M à celle d'un autre point H ou N qui en est infiniment proche, tandis que je conserve les différentielles dx et dy pour indiquer le changement qui arrive lorsqu'une *même* particule passe du lieu qu'elle occupe au lieu contigu. Elles se trouvent les unes et les autres par les mêmes règles; et on doit observer que dans les différentielles d'une fonction relative aux mêmes coordonnées x et y, δx et dx ont toujours le même coëfficient, et que δy et dy ont aussi le même coëfficient.

Maintenant, il est clair qu'en vertu de la force Q, la pression de la colonne MN sur le point N est $Q\,\delta y$; et qu'en vertu de la force P', la pression de la colonne NK sur le point K est $P'\,\delta x$. La première pression se transmet, comme la seconde, au point K; et en les ajoutant ensemble, on aura $Q\,\delta y + P'\,\delta x$ pour la pression totale que ce même point K souffre de la part du fluide MNK. De même, en vertu de la force P la pression de la colonne MH sur le point H est $P\,\delta x$; et en vertu de la force Q' la pression de la colonne HK sur le point K est $Q'\,\delta y$. Ajoutant ensemble ces deux pressions, on aura $P\,\delta x + Q'\,\delta y$ pour la pression totale que le point K souffre de la part du fluide MHK. Or, pour qu'il y ait équilibre, il faut que le point K soit également pressé par le fluide MNK, et par le fluide MHK. On aura donc $Q\,\delta y + P'\,\delta x = P\,\delta x + Q'\,\delta y$, et par conséquent $(P' - P)\,\delta x = (Q' - Q)\,\delta y$. Mais il est évident que $P' - P$ est la différentielle de P; et qu'en prenant cette différentielle il faut simplement faire varier y, puisque du point M au point infiniment voisin N, x et t demeurent constans : de même, $Q' - Q$ est la différentielle de Q, qu'il faut prendre en ne faisant simplement varier que x. Donc en supposant $P' - P = A\,\delta y$, $Q' - Q = A'\,\delta x$, on aura $A\,\delta y\,.\,\delta x = A'\,.\,\delta x\,.\,\delta y$, ou $A = A'$. Par conséquent l'état d'équilibre demande que *la différentielle de* P, *prise en ne faisant varier que* y, *et divisée par* δ y, *soit la même que la dif-*

férentielle de Q, *prise en ne faisant varier que* x, *et divisée par* δ x.

On énonce ordinairement cette proposition d'une manière commode et abrégée que voici, $\left(\frac{\delta P}{\delta y}\right) = \left(\frac{\delta Q}{\delta x}\right)$, ou ce qui revient au même, $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$ *.

III. Il est également facile de trouver les conditions de l'équilibre, quand les forces qui agissent sur le fluide, ne sont pas dans un même plan. Car quelques directions que ces forces aient, elles peuvent toujours être réduites à trois, dont deux soient situées dans le plan EPM, et la troisième soit perpendiculaire au même plan. Supposons donc que le point M éprouve l'action des trois forces P, Q, R, de même nature que les forces P, Q, du n°. précédent, et parallèles chacune à chacune des trois coordonnées rectangles x, y, z. Concevons ensuite huit points fluides M, N, K, H, Q, O, S, R, formant un parallélipipède rectangle qu'on peut regarder comme composé de six canaux rectangulaires. Le fluide sera en équilibre dans chacun de ces canaux. Ainsi l'équilibre dans le canal $MNKH$ donnera $\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right)$; l'équilibre dans le canal

* J'emploie des parenthèses, à la manière d'Euler, pour distinguer une quantité de ce genre d'avec le quotient d'une différentielle divisée par une autre différentielle.

$MOQH$ donnera $\left(\frac{dP}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dx}\right)$; et l'équilibre dans le canal $MNSO$ donnera $\left(\frac{dQ}{dz}\right) = \left(\frac{dR}{dy}\right)$. Les trois autres canaux donneroient les mêmes équations. On a donc en général les conditions de l'équilibre d'un fluide soumis à des forces quelconques.

IV. Tout cela posé, que le fluide $ABCD$ (*Fig.* 14) soumis à l'action de la pesanteur se meuve dans le vase qui le contient, suivant telle loi qu'on voudra; de manière cependant que chaque point M n'ait que deux mouvemens, l'un vertical ou parallèle à EP, l'autre horizontal ou parallèle à PM. On appliquera sans peine, au moyen du n°. précédent, la même théorie à l'hypothèse où les particules du fluide auroient, outre le mouvement vertical, deux mouvemens horizontaux perpendiculaires entr'eux; ce qui est le cas le plus composé du probléme, puisqu'on peut toujours réduire un mouvement quelconque aux trois dont nous parlons. Ici je n'en considère que deux, pour simplifier le calcul.

Soient, comme dans le n°. II, quatre points fluides M, N, K, H formant un parallélogramme rectangle; qu'au bout d'un instant ils parviennent respectivement en m, n, k, h; et soient menées à l'axe EP, les perpendiculaires mp, nf, hg, kq.

Supposons

Supposons
- la gravité .... $= g$,
- EP .... $= x$,
- PM .... $= y$,
- PO .... $= z$,
- le temps .... $= t$,
- la vitesse du point M parallèlement à EP .... $= u$,
- la vitesse du même point parallèlement à PM .... $= v$.

Les vîtesses u et v varient, à mesure que les coordonnées x et y, et le temps t varient : elles sont donc en général des fonctions de x, y et t. Pour déterminer la nature de ces fonctions, on observera que le fluide étant supposé couler dans un vase, on a $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$, lorsque $y = z$. Or, $\frac{dx}{dz}$ est une fonction de x et z, donnée par la figure du vase, et indépendante du temps. Il faut donc que les quantités u et v soient telles qu'en faisant $y = z$, la fonction du temps qu'elles renferment, disparoisse. Il y a plusieurs moyens analytiques de satisfaire à cette condition : car soient, par exemple, $u = M\theta + M'\theta' + M''\theta'' +$ etc.; $v = N\theta + N'\theta' + N''\theta'' +$ etc.; (θ, θ', θ'' étant des fonctions du temps; M et N des fonctions de y et z ; M', N', M'', N'', d'autres fonctions de x et z, telles néanmoins qu'elles s'évanouissent lorsque $y = z$). Il est clair qu'on aura $\frac{u}{v} = \frac{dx}{dz}$ $= \frac{M}{N}$ fonction de x et z, lorsque $y = z$. Mais,

sans examiner en détail toutes les espèces de fonctions qu'on peut employer analytiquement dans cette recherche, je m'en tiens à la supposition $u = M\theta$, $v = N\theta$, qui est très-générale et qui suffit pour rendre raison du mouvement d'un fluide qui coule dans un vase, tel que nous le considérons ici. Si le fluide avoit une étendue assez grande pour qu'on pût le regarder comme indéfini, les vitesses u et v ne seroient pas assujetties à la condition que nous venons d'exposer; mais alors il faudroit supposer d'autres conditions équivalentes, comme, par exemple, que le mouvement du fluide parvient, par une cause quelconque, à un état constant et tel que pour les mêmes coordonnées x et y, les quantités M et N ont les mêmes valeurs; sans quoi le problème demeureroit indéterminé.

V. Soient $du = d(\theta M) = \theta A\,dx + \theta B\,dy + M.T\,dt$; $dv = d(\theta N) = \theta A'\,dx + \theta B'\,dy + N.T\,dt$; A, B, A', B' étant des fonctions de x et de y, T une fonction du temps, dx et dy les espaces parcourus verticalement et horizontalement par le point M, durant l'instant dt. En mettant pour dx sa valeur $u\,dt$ ou $\theta M\,dt$, et pour dy sa valeur $v\,dt$ ou $\theta N\,dt$, on aura la force verticale $\frac{du}{dt} = \theta^2 A.M + \theta^2 B.N + M.T$; et la force horizontale $\frac{dv}{dt} = \theta^2 A'.M + \theta^2 B'.N + N.T$. Or, 1°. si les particules n'agissoient point les unes sur les autres, la vitesse verticale u devien-

droit à la fin de l'instant dt, $u+gdt$. Donc, par le principe de Dynamique de d'Alembert, si l'on regarde la vitesse $u+gdt$ comme composée des deux vîtesses $u+du$ et $gdt-du$; et si l'on considère que de ces deux vîtesses, la première est la seule qui subsiste, il est clair que la seconde $gdt-du$ doit être telle qu'elle ne change rien à la première, et qu'elle soit anéantie. 2°. On verra de même, à l'égard de la vîtesse horizontale v, qu'en vertu de la vîtesse $-dv$, le point M devroit être en équilibre. Par conséquent, si le point M étoit soumis à chaque instant à l'action des deux forces $g-\frac{du}{dt}$, $-\frac{dv}{dt}$, il demeureroit en équilibre; ce qui donne (N°. II) l'équation fondamentale $\left(\frac{d[g-(6^2 A.M+6^2 B.N+M.T)]}{dy}\right)$ $=\left(\frac{d[-6^2 A'.M-6^2 B'.N-N.T.]}{dx}\right)$.

VI. Comme le fluide est supposé incompressible, le rectangle $MNKH$, en passant dans la position $mnkh$, occupe toujours le même espace. Il faut donc trouver l'expression de l'aire $mnkh$ et l'égaler à celle du rectangle $MNKH$. Pour cela, on observera que dans l'instant dt le point M parcourt parallèlement à EP un petit espace $=udt$, et parallèlement à ED un petit espace $=vdt$; de plus, puisque les différentielles dy, δy ont le même coéfficient, on voit qu'au point N auquel répond l'ordonnée $y+\delta y$, la vîtesse u devient

$u + \theta B \delta y$, et la vitesse v devient $v + \theta . B' \delta y$; ainsi le point N parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . B \delta y)\, dt$, et parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . B' \delta y)\, dt$. De même, les différentielles dx et δx ayant le même coëfficient, on trouve que le point H parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . A \delta x)\, dt$, et parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . A' \delta x)\, dt$; qu'enfin le point K parcourt parallèlement à EP un petit espace $= (u + \theta . A \delta x + \theta . B \delta y)\, dt$, et parallèlement à ED un petit espace $= (v + \theta . A' \delta x + \theta . B' \delta y)\, dt$. Ainsi, Ep et pm, Ef et fn, Eg et gh, Eq et qk, étant supposées les coordonnées des points m, n, h, k, on aura pour les abscisses, $Ep = x + u\, dt$; $Ef = x + (u + \theta . B \delta y)\, dt$; $Eg = x + \delta x + (u + \theta . A \delta x)\, dt$; $Eq = x + \delta x + (u + \theta . A \delta x + \theta B \delta y)\, dt$; et pour les ordonnées, $pm = y + v\, dt$; $fn = y + \delta y + (v + \theta . B' \delta y)\, dt$; $gh = y + (v + \theta . A' \delta x)\, dt$; $qk = y + \delta y + (v + \theta A' \delta x + \theta . B' \delta y)\, dt$. Or, puisqu'il résulte de ces expressions que la différence des deux lignes Ep et Ef, celle des deux lignes Eg et Eq, celle des deux lignes pm et gh, celle des deux lignes fn et qk, sont des infiniment petits du second ordre, il s'ensuit que les lignes mn, hk, peuvent être regardées comme parallèles à ED, et les lignes mh, nk comme parallèles à EP. Donc le quadrilatère $mnkh$ peut être considéré comme un rectangle dont la surface $= mh \times mn = (Eg - Ep)$

$\times (fn - pm)$, sensiblement : et comme il doit être égal au rectangle MNK, on aura l'équation $\delta x . \delta y = (\delta x + \theta . A \delta x dt) \times (\delta y + \theta . B' \delta y dt)$; d'où l'on tire, en effaçant ce qui se détruit et négligeant les infiniment petits du quatrième ordre, $\theta A \delta x \delta y dt + \theta . B' \delta x \delta y dt = 0$; ou $A = - B'$; ou, ce qui revient au même, $\left(\frac{dM}{dx}\right) = - \left(\frac{dN}{dy}\right)$; première équation de condition entre M et N, par laquelle on voit que $N dx - M dy$ doit être une différentielle complète.

VII. L'équation fondamentale du numéro V, devant être identique (N°. II), il faut que la partie $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right)$ du premier nombre soit égale à la partie correspondante $\left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$ du second. Ainsi, à cause de T constant dans ces expressions, on aura $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$: seconde équation de condition entre M et N, par laquelle on voit que $M dx + N dy$ doit être une différentielle complète.

VIII. Il est facile de s'assurer *à postériori*, que les deux équations $\left(\frac{dM}{dx}\right) = - \left(\frac{dN}{dy}\right)$, $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$ remplissent les conditions de l'équilibre, ou satisfont entièrement à l'équation

fondamentale proposée. Car puisqu'on a $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right) = \left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$, le reste de cette équation donnera (θ étant ici constant), $A\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dA}{dy}\right) + B\left(\frac{dN}{dy}\right) + N\left(\frac{dB}{dy}\right) = A'\left(\frac{dM}{dy}\right) + M\left(\frac{dA'}{dx}\right) + B'\left(\frac{dN}{dx}\right) + N\left(\frac{dB'}{dx}\right)$.

Or, puisqu'on a $A = \left(\frac{dM}{dx}\right)$, $B = \left(\frac{dM}{dy}\right)$, $A' = \left(\frac{dN}{dx}\right)$, $B' = \left(\frac{dN}{dy}\right)$, on aura $A\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dy}\right)$; $B\left(\frac{dN}{dy}\right) = \left(\frac{dM}{dy}\right) \times \left(\frac{dN}{dy}\right) = -\left(\frac{dM}{dy}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right)$; $A'\left(\frac{dM}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right) \times \left(\frac{dM}{dx}\right)$; $B'\left(\frac{dN}{dx}\right) = \left(\frac{dN}{dy}\right) \times \left(\frac{dN}{dx}\right) = -\left(\frac{dM}{dx}\right) \times \left(\frac{dN}{dx}\right)$; $M\left(\frac{dA}{dy}\right) = M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}\right)$; $M\left(\frac{dA'}{dx}\right) = M\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dx}\right) = M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dx}\right)$, expression qui par la nature du calcul différentiel, est la même chose que $M\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dx}\right)}{dy}\right)$; $N\left(\frac{dB}{dy}\right) = N\left(\frac{\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right)$;

$$N\left(\frac{dB'}{dx}\right)=N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dy}\right)}{dx}\right)=N\left(\frac{d\left(\frac{dN}{dx}\right)}{dy}\right)$$

$$=N\left(\frac{d\left(\frac{dM}{dy}\right)}{dy}\right).$$ Substituant toutes ces valeurs dans l'équation précédente, on trouvera que tous ses termes se détruisent, et que par conséquent elle est identique.

IX. *Remarque.* Il y a un cas où l'équation $\left(\frac{dM}{dy}\right)=\left(\frac{dN}{dx}\right)$, résultante de l'hypothèse $\left(\frac{d(M.T)}{dy}\right)=\left(\frac{d(N.T)}{dx}\right)$, n'a pas lieu nécessairement. Cela arrive lorsque la fonction T du temps est un multiple de θ^2. En effet, supposons $T=b\,\theta^2$, b étant un coëfficient constant : l'équation fondamentale du N°. V devient (en divisant tout par θ^2), $\left(\frac{d\left(\frac{g}{\theta^2}-A.M-B.N-M.b\right)}{dy}\right)$

$=\left(\frac{d(-A'.M-B'N-Nb)}{dx}\right)$; c'est-à-dire,

$$-M\left(\frac{dA}{dy}\right)-A\left(\frac{dM}{dy}\right)-N\left(\frac{dB}{dy}\right)$$

$$-B\left(\frac{dN}{dy}\right)-b\left(\frac{dM}{dy}\right)=-M\left(\frac{dA'}{dx}\right)$$

$$-A'\left(\frac{dM}{dx}\right)-N\left(\frac{dB'}{dx}\right)-B'\left(\frac{dN}{dx}\right)$$

$-b\left(\frac{dN}{dx}\right)$; ou bien (en mettant pour

A, B, A', B', leurs valeurs $\left(\frac{dM}{dx}\right)$, $\left(\frac{dM}{dy}\right)$, $\left(\frac{dN}{dx}\right)$, $\left(\frac{dN}{dy}\right)$, et effaçant les termes qui se détruisent en vertu de l'équation $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$, qui a toujours lieu N°. VI),

$$M\left(\frac{dA}{dy}\right) + N\left(\frac{dB}{dy}\right) + b\left(\frac{dM}{dy}\right) = M\left(\frac{dA'}{dx}\right) + N\left(\frac{dB'}{dx}\right) + b\left(\frac{dN}{dx}\right):$$

équation aux différences partielles du premier ordre, à laquelle il faudra satisfaire, de même qu'à l'équation $\left(\frac{dM}{dx}\right) = -\left(\frac{dN}{dy}\right)$, pour représenter le mouvement du fluide dans le cas dont il s'agit.

La valeur de la fonction θ du temps est ici donnée immédiatement; car puisqu'on a en général $d\theta = T\,dt$ (N°. V), et qu'on suppose maintenant $T = b\,\theta^2$; nous aurons $d\theta = b\,\theta^2\,dt$; d'où l'on tire $\theta = \frac{1}{a - bt}$. Or, si l'on suppose que le fluide soit animé seulement par la pesanteur, et que les vîtesses u, et v soient zéro, lorsque $t = 0$, on voit qu'à cause des équations $u = M\theta$, $v = \theta N$, la fonction θ du temps sera aussi $= 0$, lorsque $t = 0$. Donc alors l'équation $\theta = \frac{1}{a - bt}$ ne peut pas avoir lieu, puisque θ n'est pas zéro, lorsque $t = 0$. Mais, si au premier instant, le fluide a reçu une impulsion quelconque, par exemple, s'il a été mis

en mouvement par l'action d'un piston, l'équation $\theta = \frac{1}{a - bt}$ sera admissible; et les vitesses initiales du fluide seront $\frac{M}{a}$, $\frac{N}{a}$.

X. *Scholie général.* Dans la recherche générale des fonctions M, N, θ, on observera 1°. que les valeurs de ces fonctions doivent être compatibles avec l'équation qui exprime la figure du vase. 2°. Que les résultantes des forces perdues $g - \frac{du}{dt}$, $- \frac{dv}{dt}$, doivent être perpendiculaires aux surfaces supérieure et inférieure du fluide, puisque si ces forces existoient seules, le fluide seroit en équilibre, et que dans un fluide en équilibre les forces qui agissent à sa surface sont nécessairement perpendiculaires à cette surface. 3°. Que les résultantes dont il s'agit agissent de haut en bas pour la surface supérieure du fluide, et de bas en haut pour la surface inférieure; autrement les parties du fluide se détacheroient, et il ne formeroit plus une masse continue, comme on le suppose dans la solution du problême. 4°. Que la théorie dont il s'agit a principalement lieu pour les vases qui vont en se rétrécissant de haut en bas, ou qui du moins s'éloignent peu de la forme prismatique, soit dans un sens, soit dans l'autre; car, dans un vase qui va en s'élargissant considérablement de haut en bas, il doit arriver souvent que le fluide abandonne les parois; et alors les particules tombent comme des corps détachés.

Je me contente d'indiquer ces remarques générales. Si je voulois en développer les applications et les conséquences, il me faudroit un espace beaucoup plus grand que je ne puis le donner ici à des objets de simple curiosité. Les Lecteurs qui voudront faire une étude plus particulière de toutes ces théories, pourront consulter les ouvrages que j'ai cités au commencement de ce chapitre.

CHAPITRE VI.

De l'écoulement des fluides qui sortent de vases composés, ou de vases partagés en compartimens par des cloisons.

270. LES besoins de la pratique, mon objet principal, exigeant nécessairement toute la simplicité possible dans les calculs, même aux dépens d'une grande précision, me forcent ici, comme ailleurs, de revenir presque toujours à l'hypothèse où les écoulemens se font par de petits orifices; hypothèse qui entraîne ou admet celle d'une vitesse dûe à la hauteur réelle et libre du fluide au-dessus de l'orifice. On verra que nonobstant cette supposition, il se rencontre encore, dans les problèmes suivans, plusieurs cas où les opérations analytiques sont fort compliquées.

271. Problème I. *L'eau étant entretenue constamment* (Figure 15) *au même niveau* AD (*par l'affluence d'une rivière, d'une source ou de toute autre manière*), *dans un vase composé de deux autres* ABCD, GHKI, *de figure quelconque, et dont l'inférieur est percé à son fond ou à ses parois d'une ouverture* pq, *très-petite relativement à toutes les sections horizontales des deux vases, par laquelle l'eau s'échappe continuellement : on demande la quantité d'eau qui sortira en un temps proposé ?*

L'orifice pq étant regardé comme infiniment petit, il est clair que l'écoulement est le même que si au vase composé on substitue le vase simple *AEFD;* d'où il suit que ce problème se rapporte à celui de l'article 224.

272. Problème II. *Supposons maintenant que les deux vases composans* ABCD, GHKI *soient verticaux et prismatiques : que la surface de l'eau étant d'abord en* AD, *le vase composé se vide par le petit orifice* pq, *sans recevoir de nouvelle eau : on demande le temps que la surface de l'eau met à s'abaisser d'une hauteur quelconque ?*

La vitesse en pq étant dûe, à chaque instant, à la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice, et l'écoulement étant évidemment le même tant que le fluide est dans le vase supérieur, que si au vase composé on substituoit le simple vase prismatique vertical *AEFD* : il s'ensuit (232) qu'en désignant le temps que la surface de l'eau met à par-

courir un certain espace par la lettre T écrite au-devant de cet espace ; et nommant A l'aire de chaque section horizontale du vase $ABCD$; K, celle de l'orifice pq ; θ, le temps de la chute par α : on aura, $T.AL = \frac{\theta A(\sqrt{AE}-\sqrt{LE})}{K\sqrt{\alpha}}$; et $T.AB = \frac{\theta A(\sqrt{AE}-\sqrt{BE})}{K\sqrt{\alpha}}$.

Quand la surface du fluide est parvenue dans le vase inférieur, par exemple en NP, l'écoulement se fait dans un vase simple ; et on a (en nommant B chaque section horizontale de ce vase $GHKI$), $T.GN = \frac{\theta B(\sqrt{GH}-\sqrt{NH})}{K\sqrt{\alpha}}$.

Ajoutant ce temps avec celui qui a été employé à parcourir AB, on aura,

$$T.AQ = \frac{\theta A(\sqrt{AE}-\sqrt{BE})+\theta B(\sqrt{BE}-\sqrt{BQ})}{K\sqrt{\alpha}}.$$

Le problème ne seroit pas plus difficile à résoudre, quant aux élémens de la question (227), si les deux vases composans avoient toute autre figure.

273. *Remarque I.* Selon l'expérience, tant que le fluide conserve une certaine hauteur au-dessus de BC dans le vase supérieur, la vitesse en pq est dûe, au moins sensiblement, à la hauteur entière du fluide au-dessus de pq, même lorsque pq augmente jusqu'à devenir égal au fond HK, pourvu néanmoins que le tuyau $GHKI$ soit fort mince par rapport au vase supérieur $ABCD$, et que de

plus la hauteur GH soit fort petite. Le temps que la surface du fluide met à descendre dans le vase supérieur, de AD en BC, peut donc encore alors se déterminer comme dans l'article précédent. Mais quand le fluide est parvenu dans le tuyau $GHKI$, et que l'orifice $pq = HK$, la masse d'eau $GHKI$ tombe tout d'une pièce, à la manière des corps pesans. Si l'on veut connoître le temps qu'elle met à s'écouler entièrement, ou ce qui revient au même, le temps que la surface GI de l'eau emploie à parcourir GH, on observera qu'au premier instant de ce mouvement, la surface GI a une vitesse initiale, qui est (216) à la vitesse en HK, comme B est à A, au moins à-peu-près. Soit XG la hauteur dûe à cette vitesse initiale : on trouvera, par les formules ordinaires des mouvemens variés, $u\,du = \varphi\,ds$, $dt = \frac{ds}{u}$, que le temps dont il s'agit est égal à l'excès du temps de la chute d'un corps grave par XH, sur le temps de la chute par XG.

274. *Remarque II.* Il seroit facile de résoudre le problême précédent, par le principe du mouvement parallèle des tranches, sans s'astreindre à la supposition que l'orifice pq est comme infiniment petit. Car soit LM la surface de l'eau dans le vase supérieur; et nommons z la hauteur indéterminée HS de cette surface au-dessus de l'orifice; b, la hauteur du tube GH. En appliquant ici l'équation générale de l'article 257, la quantité N

sera $\frac{z-b}{A} + \frac{b}{B}$; M sera A, du moins sensiblement, pour le vase supérieur, et deviendra B pour le vase inférieur ; de sorte que si nous la représentons constamment par M, l'équation différentielle entre z et s, dans les deux cas, est de cette forme, $M^2 z\, d z + \frac{K^2 (z-b) M d s}{A} + \frac{K^2 b M d s}{B} + s\, d z\, (K^2 - M^2) = 0$. Cette équation s'intègre par la méthode du même article cité. Nous en tirerons d'abord, pour le vase supérieur, la relation entre z et s, et l'expression du temps que la surface de l'eau met à descendre de AD en BC. Ensuite nous passerons à la considération de l'écoulement dans le vase inférieur, en observant qu'au moment où la surface de l'eau entre dans ce vase, elle a une vîtesse connue, à laquelle il faut avoir égard dans l'intégration de l'équation différentielle entre z et s ; ce qui influe aussi sur l'équation entre z et t. Connoissant $T.AB$ et $T.BQ$, on connoîtra $T.AQ$.

275. Problême III. *Les vases* ABCD, FCEG, HEKL (Fig. 16), *de formes quelconques, étant supposés communiquer ensemble par les petites ouvertures* C, E, *et le fluide s'échappant dans l'air par la petite ouverture* L *du dernier : on demande les hauteurs dûes aux vîtesses en* C, E, L, *et la quantité de l'écoulement, lorsque le mouvement est parvenu à l'uniformité, et que par*

conséquent le premier vase recevant autant d'eau qu'il en sort par l'ouverture L, *les hauteurs* AB, CF, EH, *ou* LK, *demeurent constamment les mêmes ?*

Puisque les ouvertures C, E, L sont regardées comme infiniment petites par rapport aux amplitudes des vases, il est évident que la petite masse qui passe à chaque instant du premier vase dans le second, et celle qui passe du second dans le troisième, ne peuvent occasionner, en vertu de ces mouvemens, qu'un ébranlement insensible dans le fluide choqué, et que par conséquent la loi de continuité est observée, du moins sensiblement, d'un fluide à l'autre. Or, si ayant prolongé les surfaces GF, KH des deux fluides $FCEG$, $HELK$, jusques en O et Q, on observe que les deux fluides $CFOB$, $CFGE$, qui communiquent ensemble par l'ouverture C, se font équilibre (19); que pareillement les deux fluides $EHQC$, $EHKL$ se font équilibre : on verra que dans l'hypothèse du problême, la vîtesse en C est simplement dûe à la hauteur DF; la vîtesse en E, à la hauteur GH; et la vîtesse en L, à la hauteur KL.

Soient
- AB . . . . $= h$,
- DF . . . . $= x$,
- GH . . . . $= y$,
- KL . . . . $= z$,
- Chacune des quantités égales d'eau qui passent pendant le temps t de l'écoulement, par chacune des trois ouvertures C, E, L . . . . $= Q$.

Nommons de plus θ le temps de la chute d'un corps grave par α.

On aura (224), $Q = \frac{2\, t\, C \sqrt{\alpha\, x}}{\theta}$,
$Q = \frac{2\, t\, E \sqrt{\alpha\, y}}{\theta}$, $Q = \frac{2\, t\, L \sqrt{\alpha\, z}}{\theta}$. De plus $x + y + z = h$. Ces équations comparées ensemble donnent, pour les quatre inconnues x, y, z, Q, les valeurs suivantes,

$$x = h \times \frac{L^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$y = h \times \frac{C^2 L^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$z = h \times \frac{C^2 E^2}{C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2},$$

$$Q = \frac{2\, t\, L \,.\sqrt{\alpha\, h}}{\theta} \times \frac{C\, E}{\sqrt{[C^2 L^2 + C^2 E^2 + L^2 E^2]}}.$$

Ces formules contiennent tout ce qui est relatif à l'écoulement proposé, et fournissent des questions analogues à celles qu'on a traitées dans l'article 225.

Le problème se résoudroit de la même manière, s'il y avoit un plus grand nombre de vases.

276. *Remarque.* L'écoulement par les ouvertures C, E, L, ne devient uniforme, ou, ce qui en est la cause, les hauteurs du fluide qui produisent l'écoulement, ne parviennent à demeurer constamment les mêmes, qu'au bout d'un certain temps. Reste donc à examiner la loi suivant laquelle le fluide monte dans les vases FE, HL au commencement du mouvement, et avant que l'écoulement soit

soit devenu régulier et permanent. Je commence par considérer simplement deux vases, et je suppose de plus que le second soit prismatique.

277. Problême IV. *Soit* (Fig. 17) *le vase* ABCD *de forme quelconque, entretenu constamment plein à la hauteur donnée* CD, *lequel communique avec le vase prismatique* FCEG, *par la petite ouverture* C; *que celui-ci laisse échapper librement de l'eau par la petite ouverture* E : *on demande la position de la surface de l'eau dans le vase* FCEG, *au bout d'un certain temps ?*

Supposons qu'au bout du temps proposé t, la surface de l'eau soit parvenue en NO dans le vase $FCEG$, et qu'en un instant elle prenne la position infiniment voisine no. Nommons θ le temps de la chute par α; h, la hauteur donnée CD; x, la hauteur DN; A, l'aire de la base ou de la section horizontale du vase CG. Il est évident que dans l'instant dt, x est la hauteur dûe à la vitesse du fluide en C, et $h-x$ la hauteur dûe à la vitesse en E. Il n'est pas moins clair (224) que dans ce même instant il sort par l'ouverture C une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Cdt.\sqrt{\alpha x}}{\theta}$, et par l'ouverture E, une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Edt\sqrt{[\alpha(h-x)]}}{\theta}$. Or, la différence de ces deux quantités est évidemment égale à $NOon$.

Ainsi, on aura $\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{\theta} - \frac{2Edt\sqrt{[\alpha(h-x)]}}{\theta}$ $= - A\,dx$; d'où l'on tire,

$$dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{\alpha}} \times \frac{dx}{E\sqrt{(h-x)} - C\sqrt{x}}.$$

Pour intégrer cette équation, on fera d'abord $x = \frac{yy}{h}$, puis $E\sqrt{(hh-yy)} - Cy = Ez$; et par-là on obtiendra une équation de cette forme,

$$dt = M\,dz + \frac{Nz\,dz}{\sqrt{(P^2-z^2)}} + \frac{Q\,dz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}};$$

M, N, P, Q étant des quantités constantes, faciles à déterminer. L'intégration est maintenant fort aisée. Le dernier terme $\frac{Q\,dz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$, le seul qui puisse faire quelque difficulté, s'intègre en supposant $z = \frac{P^2}{u}$; ce qui donne $\frac{Q\,dz}{z\sqrt{(P^2-z^2)}}$

$$= \frac{-Q\,du}{P\sqrt{(u^2-P^2)}} = \frac{-Q}{P}\left(\frac{\left(du + \frac{u\,du}{\sqrt{(u^2-P^2)}}\right)}{u+\sqrt{(u^2-P^2)}}\right),$$

dont l'intégrale est $-\frac{Q}{P}L.[u+\sqrt{(u^2-P^2)}]$;

On trouvera donc toujours la valeur de t en x. Je n'écris pas ici tous ces calculs qui sont un peu longs, mais qui n'ont d'ailleurs aucune difficulté.

Si le vase $FCEG$ n'étoit pas prismatique, l'aire A ne seroit pas une quantité constante; elle seroit une fonction de x et de constantes, donnée par la figure de ce vase : alors le calcul deviendroit encore plus

compliqué ; mais il s'exécuteroit toujours, au moins par les méthodes d'approximation.

Il faut observer qu'au commencement du mouvement, le fluide doit avoir une certaine hauteur dans le vase CG, pour que l'eau qui passe du vase $ABCD$ dans l'eau CO n'y cause pas d'ébranlement sensible. On satisfera à cette condition, en déterminant la constante qui entre dans l'intégrale du temps, de manière que lorsque $t=0$, DN ait un valeur *donnée* et un peu moindre que h.

278. Problème V. *Soient maintenant* (Fig. 18) ABCD, *un vase quelconque, et les vases prismatiques successifs, en nombre quelconque*, FCEG, HELK, QLMR, *tous communiquant ensemble par les petites ouvertures* C, E, L; *que le premier soit entretenu constamment plein à la hauteur donnée* CD, *et que le dernier laisse échapper librement de l'eau par la petite ouverture* M : *on demande les positions des surfaces* NO, PS, QR, *de l'eau dans les vases prismatiques, au bout d'un certain temps ?*

Supposons que pendant l'élément dt du temps t, la surface NO parvienne en no ; PS en ps ; QR en qr. Soient $CD=h$; $DN=x$; $OP=y$; $SQ=r$; $RM=q$; la base du vase $CG=A$; celle du vase $EK=B$; celle du vase $LR=R$; le temps de la chute par $\alpha=\theta$. Les hauteurs dûes aux vitesses en C, E, L, M, étant respectivement x, y, z, q, les quantités d'eau qui passent par les orifices C,

E, L, M, sont respectivement (224), $\frac{2Cdt\sqrt{ax}}{6}$, $\frac{2Edt\sqrt{ay}}{6}$, $\frac{2Ldt\sqrt{az}}{6}$, $\frac{2M\sqrt{aq}}{6}$. De plus, il est évident que la différence des deux premières quantités est égale au volume $NOon$; que la différence de la seconde et de la troisième est égale au volume $PSsp$; que la différence de la troisième et de la quatrième est égale au volume $QRrq$; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de vases. Par conséquent, on aura d'abord les équations $\frac{2dt\sqrt{a}}{6}$. $(C\sqrt{x}-E\sqrt{y}) = NO \times Nn$; $\frac{2dt\sqrt{a}}{6}$. $(E\sqrt{y}-L\sqrt{z}) = PS \times Pp$; $\frac{2dt\sqrt{a}}{6}$. $(L\sqrt{z}-M\sqrt{q}) = QR \times Qq$. Reste à trouver les expressions des petites lignes Nn, Pp, Qq. Or,

1°. La petite ligne $Nn = -dx$, où je mets le signe —, parce que t augmentant, x diminue. Ainsi la première équation devient

$$\frac{2dt\sqrt{a}}{6}(C\sqrt{x}-E\sqrt{y}) = -Adx.$$

2°. La petite ligne $Pp = PO + Oo - po$; mais $PO = y$; $Oo = -dx$; $po = y + dy$, puisque PO, po sont deux quantités consécutives. Ainsi $Pp = -dx - dy$; et la seconde équation devient

$$\frac{2dt\sqrt{a}}{6}(E\sqrt{y}-L\sqrt{z}) = -B(dx+dy).$$

3°. La petite ligne $Qq = QS + Ss - qs =$

$QS + Pp - qs = z - dx - dy - qs$; et $qs = z + dz$. Ainsi Qq ou $Rr(dq) = -dx - dy - dz$, et la troisième équation devient :

$$\frac{2dt\sqrt{a}}{\theta}(L\sqrt{z} - M\sqrt{q}) = -R(dx + dy + dz),$$

$$\text{ou } \frac{2dt\sqrt{a}}{\theta}(L\sqrt{z} - M\sqrt{q}) = Rdq.$$

Enfin on a toujours

$$x + y + z + q = h.$$

Toutes ces équations combinées ensemble, serviront à trouver la valeur de t en x, ou en y, ou en z, ou en q, et à connoître par conséquent les hauteurs auxquelles le fluide parvient dans les vases CG, EK, LR, en un temps proposé. Mais on voit que ces calculs, sans être difficiles, sont fort compliqués; ils le seroient encore plus, si les vases FE, HL, QM n'étoient pas prismatiques.

279. Problême VI. *Un vase prismatique* FCEG (Fig. 19) *étant supposé recevoir, par l'effusion d'un ruisseau, d'une source, des quantités égales d'eau, en temps égaux, et laisser échapper en partie ces eaux, par le petit orifice* E : *on demande la hauteur à laquelle l'eau s'élévera dans le vase* FCEG *en un temps donné ?*

La solution de ce problême que M. Montucla a traité par une méthode qui lui est particulière, est un corollaire fort simple de l'article 277.

En effet, la quantité d'eau que le vase reçoit par l'affusion de la source, étant la même pour le même temps, ou étant en général proportionnelle

au temps, il est clair que la quantité fournie pendant l'instant dt, peut être représentée par $\frac{2Cdt\sqrt{\alpha b}}{\theta}$, C étant un orifice donné, et b la hauteur constamment dûe à la vitesse par C. Ainsi, en supposant $CN = x$, et conservant les autres dénominations de l'article cité, on aura l'équation, $\frac{2Cdt\sqrt{\alpha b}}{\theta}$ $- \frac{2Edt\sqrt{\alpha x}}{\theta} = A\,dx$; ou bien, $dt = \frac{\theta A}{2\sqrt{\alpha}}$ $\times \frac{dx}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$. On intégrera facilement cette équation, en faisant $x = \frac{yy}{b}$; et on connoîtra par conséquent la relation demandée entre x et t.

La quantité d'eau qui sort par l'ouverture E, pendant le temps t, est $\int \frac{2Edt\sqrt{\alpha x}}{\theta}$, ou $E \cdot A \int \frac{dx\sqrt{x}}{C\sqrt{b} - E\sqrt{x}}$, intégration qui s'effectue sans peine, en faisant comme tout-à-l'heure, $x = \frac{yy}{b}$.

280. Problême VII. *On suppose que le vase quelconque* ISTL (Fig. 20) *entretenu constamment plein à la hauteur* TL, *transmette l'eau au vase prismatique* AMNC *par le moyen du petit tuyau horizontal* TM, *et on demande le temps que la surface de l'eau dans le vase* AMNC *mettra à parvenir dans une position quelconque* EG ?

Il est clair (218), que lorsque l'on ouvre le

robinet ou la vanne R pour faire entrer l'eau dans le vase $AMNC$, elle s'élance avec une vitesse dûe à la hauteur TL ou MA. Cette vitesse subsisteroit toujours, si l'eau avoit la liberté de s'échapper, et ne restoit pas dans le vase $AMNC$. Mais quand il y en est entré une certaine quantité $MKVN$, la petite masse qui passe à chaque instant par M, et qui va choquer la masse finie $MKVN$, perd en partie, par ce choc, sa vitesse primitive, et il n'en peut résulter aucun mouvement sensible dans le fluide $MKVN$. La surface KV s'élève donc alors suivant la même loi que si la vitesse en M étoit simplement dûe, à chaque instant, à la hauteur LX, excès de la hauteur totale LT sur la hauteur KM; car les eaux $ZXTS$, $KVNM$, qui sont à même hauteur, et qui communiquent ensemble par l'orifice M, doivent être censées se faire mutuellement équilibre (19).

Cela posé, le problème se résout comme celui de l'article 232. Car si l'on regarde la hauteur AK comme donnée et comme celle du vase prismatique $AKVC$ qui reçoit l'eau par l'orifice M; qu'ensuite on nomme A la base du vase MC; M l'aire de l'orifice M; θ le temps de la chute par α; t le temps que la surface de l'eau emploie à parvenir de KV en EG: on aura $t = \frac{\theta A(\sqrt{AK} - \sqrt{AE})}{M\sqrt{\alpha}}$.

En effet, la vitesse avec laquelle l'eau monte dans le vase $AKVC$, est exactement la même que seroit, aux mêmes endroits, celle d'un fluide $AKVC$ qui

étant imaginé soumis à l'action d'une force égale à la pesanteur, mais dirigée de bas en haut, se videroit par un orifice pratiqué dans le fond supérieur AC, et égal à M. Or, il est visible (232) que dans ce dernier cas le temps employé par la surface du fluide à parvenir de KV en EG est donné par l'équation précédente. Donc cette même équation exprime le temps cherché dans l'hypothèse du problème.

281. *Corollaire.* De-là suit une conséquence analogue à l'article 233 *bis.* Dans le temps que le vase $AKVC$ met à se remplir entièrement, il sortiroit, par l'orifice M, d'un vase entretenu constamment plein à la hauteur AK au-dessus de cet orifice, une quantité double de $AKVC$; ce qui revient encore à ceci : *le temps que le vase* AKVC *met à se remplir dans l'hypothèse du problème, est double de celui qu'un vase entretenu constamment plein à la hauteur* AK *au-dessus de l'orifice* M, *emploiroit à donner, par ce même orifice, la quantité d'eau* AKVC.

282. *Remarque.* La hauteur AK que nous avons regardée comme connue, ne peut pas différer beaucoup de AM. Il sera facile, dans chaque cas particulier, de l'estimer à peu de chose près, en ayant égard à l'étendue du fond MN. Lorsqu'on voudra déterminer le temps total que l'eau met à parvenir de M en E, on pourra s'y prendre ainsi, sans craindre d'erreur sensible. Ayant fixé MK à un

petit nombre *connu* de pouces, 1°. on cherchera (225) le temps que la quantité d'eau $KMNV$ emploie à sortir par l'orifice M, en supposant que la hauteur du fluide au-dessus de l'orifice est constamment LT; 2°. on cherchera par la formule précédente, le temps que l'eau met à parvenir de K en E. Ajoutant ensemble ces deux temps, la somme sera le temps demandé, du moins à très-peu de chose près.

283. *Scholie*. Le problème précédent s'applique à la pratique, lorsqu'ayant une vaste pièce d'eau et un petit réservoir latéral, qui peuvent communiquer ensemble au moyen d'un pertuis bouché par une vanne qu'on soulève alors, on veut connoître le temps que le réservoir met à se remplir. Il peut servir aussi à déterminer l'écoulement d'un sas d'écluse dans un autre, lorsque le premier sas est comme infini par rapport au second; mais pour l'ordinaire les deux sas ont entr'eux un rapport fini. Je suppose donc que le sas supérieur, dont la quantité d'eau est déterminée, venant à communiquer par un tuyau ou par un acqueduc souterrain, avec le sas inférieur, celui-ci perd une petite partie de l'eau, soit par les fentes des portes d'écluse, soit par quelque gersure dans la maçonnerie; et je réduis, en ce cas, la question au problème suivant.

284. Problème VIII. *Le réservoir* ISTL (Fig. 21) *rempli d'abord jusqu'en* IL, *se vide par le petit tuyau* TM *qui communique avec un second réservoir* AMNC *contenant, au premier instant, de*

l'eau jusqu'en DE, *et qui en laisse échapper par l'ouverture* N. *On suppose qu'au bout d'un certain temps les deux surfaces de l'eau dans les deux réservoirs soient parvenues respectivement en* QP *et* KV; *et on demande la relation des hauteurs verticales* QH, KX, *ainsi que l'expression du temps de l'écoulement ?*

Soient $KX = x$; $KV = X$, fonction de x, donnée par la figure du vase $AMNC$; $QH = y$; $QP = Y$, fonction de y, donnée par la figure du vase $ISTL$; l'aire de l'orifice $M = M$; celle de l'orifice $N = N$; l'élément du temps $= dt$; θ le temps de la chute par α. La hauteur dûe à la vitesse de l'eau en M étant QF ou $y - x$, il est clair (224) que dans l'instant dt le vase $ISTL$ dépense une quantité d'eau exprimée par $\frac{2Mdt\sqrt{[\alpha(y-x)]}}{\theta}$ laquelle a, pour autre valeur, $-Ydy$. On a donc cette première équation, $dt = \frac{-\theta Ydy}{2M\sqrt{[\alpha(y-x)]}}$.

De plus, si de la quantité d'eau $\frac{2Mdt\sqrt{[\alpha(y-x)]}}{\theta}$ que le vase $ISTL$ fournit, à chaque instant, au vase $AMNC$, on retranche la dépense $\frac{2Ndt\sqrt{\alpha x}}{\theta}$ que celui-ci fait par l'orifice N, le reste $\frac{2Mdt\sqrt{[\alpha(y-x)]}}{\theta} - \frac{2Ndt\sqrt{\alpha x}}{\theta}$ sera évidemment l'incrément de l'eau dans le vase $AMNC$, incrément qui a pour autre valeur

$X\,dx$. Ainsi, on aura cette seconde équation $dt = \frac{\theta X\,dx}{2\sqrt{a}.(M\sqrt{[y-x]}-N\sqrt{x})}$.

Comparant les deux valeurs de dt, on aura

$$\frac{Y\,dy}{M\sqrt{(y-x)}} + \frac{X\,dx}{M\sqrt{[y-x]}-N\sqrt{x}} = 0,$$

équation fondamentale qu'il faudroit intégrer pour en tirer la relation de x à y, et pour parvenir ensuite à l'expression du temps. Cette intégration ne peut pas se faire en général.

285. *Corollaire I.* Lorsque les deux vases sont ou peuvent être censés prismatiques, ce qui a lieu ordinairement dans les sas d'écluse; l'équation devient homogène, et par conséquent séparable, parce qu'alors Y et X sont des quantités constantes. Soient donc, en ce cas, $Y=A$, $X=B$. On aura $\frac{A\,dy}{M\sqrt{[y-x]}}$ $+ \frac{B\,dx}{M\sqrt{[y-x]}-N\sqrt{x}} = 0$. D'où l'on tire, en faisant d'abord $y = xz$, puis $z-1=uu$,

$$\frac{dx}{x} = \frac{2A(N\,u\,du - M\,u^2\,du)}{M.A.u^5 - N.A.u^2 + (M.A+B.M)u - N.A},$$

équation rationnelle, et par conséquent intégrable par des méthodes connues.

On voit par-là qu'en général les deux réservoirs étant prismatiques, x et y peuvent toujours être exprimées en fonctions d'une même variable, et que par conséquent on aura aussi t en fonction de la même variable.

286. *Corollaire II.* Il y a un cas très-simple,

et qui arrive souvent dans la pratique. Supposons que pendant que l'eau du sas supérieur $ISTL$ passe dans l'inférieur $AMNC$ (l'un et l'autre étant toujours prismatiques), le dernier ne perde point d'eau, ou du moins n'en perde qu'une quantité très-petite et négligeable. Alors on pourra faire $N = 0$; et en complétant l'intégrale de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $y = HO = h$, hauteur donnée, et $x = XZ = b$, hauteur aussi donnée : on trouvera $Ay + Bx = Ah + Bb$.

Donc $dt = \frac{-\theta\, Y\, dy}{2M\sqrt{\alpha}.\sqrt{[y-x]}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{-\theta\, A\, dy \sqrt{B}}{2M\sqrt{\alpha}.\sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}}$$

dont l'intégrale complétée, de manière que $t = 0$ donne $y = h$, est $t = \frac{\theta A \sqrt{B}}{M(B+A)\sqrt{\alpha}}$

$\times [\sqrt{(Bh - Bb)} - \sqrt{[(B+A)y - Ah - Bb]}]$.

Pour déterminer le moment où l'eau se met de niveau dans les deux sas, il faut faire $x = y$ $= \frac{Ah + Bb}{A + B}$, et alors on trouve :

$$t = \theta \times \frac{A.B}{M(B+A)} \times \frac{\sqrt{[h-b]}}{\sqrt{\alpha}},$$

expression simple et commode dans la pratique.

Lorsque $A = B$, cette expression devient :

$$t = \theta \times \frac{A}{2M} \times \frac{\sqrt{[h-b]}}{\sqrt{\alpha}}.$$

CHAPITRE VII.

Continuation du même sujet : écoulemens par de petits orifices, lorsque les vases sont traversés de diaphragmes horizontaux.

287. PROBLÈME I. *Soit* ABCD (Fig. 22) *un vase prismatique vertical, divisé en deux compartimens* AEFD, EBCF, *au moyen d'une cloison horizontale* EF, *qui est percée d'un petit trou* H. *Que ce vase ayant été d'abord rempli d'eau jusqu'en* AD *conserve dans la suite constamment ce niveau par de la nouvelle eau qui entre dans le compartiment supérieur, pendant que l'eau s'échappe du compartiment inférieur par le petit orifice* G *pratiqué au fond* BC : *on demande les quantités relatives aux écoulemens par* G *et* H?

La pression de l'atmosphère, qui s'exerce en tous sens, tend, par son action sur la surface AD du fluide, à accélérer son passage par H, tandis qu'elle tend à empêcher sa sortie par G, par l'action qu'elle exerce de bas en haut contre l'orifice G; et il faut ici combiner ces deux efforts contraires avec ceux qui résultent du poids des eaux contenues dans les deux compartimens. Je représente en général par P la hauteur de la colonne d'eau équivalente à la pression de l'atmosphère, hauteur qui est d'environ

32 pieds; et je suppose, pour la simplicité, que la hauteur AB du vase (quoiqu'elle puisse excéder 32 pieds), ne soit pas néanmoins assez considérable pour produire une variation sensible dans P, du bas au haut du vase.

Imaginons, pour un moment, que l'orifice H soit bouché, l'orifice G étant ouvert : alors le compartiment inférieur BF forme une espèce de Baromètre; et on voit que si l'on a $P > BE$, ou même simplement $P = BE$, il ne pourra pas sortir d'eau par l'orifice G. Mais si $P < BE$, le niveau EF de l'eau $EFCB$ s'abaissera et prendra une position MN: tant que MB surpassera P, l'écoulement par G se fera à chaque instant, comme si la charge d'eau étoit $MB - P$, et il cessera lorsqu'on aura $MB = P$, abstraction faite du mouvement acquis.

Cette hypothèse de $BE > P$ subsistant, et le niveau de l'eau inférieure étant en MN; soit ouvert l'orifice H: l'eau passant par H tombera dans l'espace vide $EMNF$; et la vitesse, à ce passage, sera dûe à la hauteur $AE + P$. Et comme (224) la quantité d'eau qui sort par un orifice est proportionnelle au produit de l'aire de cet orifice par la racine carrée de la hauteur dûe à la vitesse, l'écoulement par H continuera à se faire suivant la même loi, pourvu que l'on ait $H\sqrt{(AE + P)} < G\sqrt{(MB - P)}$, ou même simplement $H\sqrt{(AE + P)} = G\sqrt{(MB - P)}$. On voit que les eaux contenues dans les deux compartimens formeront des masses isolées. Quant à la nature de

l'écoulement par G, ou à la détermination de la position que prendra, au bout d'un certain temps, le niveau MN des eaux du compartiment inférieur, ce problème se résoudra par les mêmes principes que celui de l'article 279.

Les orifices G, H, demeurant toujours ouverts, supposons que l'on ait : ou $P = EB$; ou $P > EB$; ou que si $P < EB$, du moins $H\sqrt{(P+AE)}$ soit $> G\sqrt{(EB-P)}$. Dans toutes ces hypothèses, les eaux qui entrent par H dans le compartiment inférieur lieront d'abord, ou bientôt, les eaux des deux compartimens, et tout le fluide devra être censé ne former plus alors qu'une seule et même masse. Lorsque cela sera arrivé, les écoulemens par G et H, se feront uniformément, c'est-à-dire, que les hauteurs dûes aux vitesses en G, H, seront des quantités constantes. Soient IB la première de ces hauteurs, AI la seconde, en sorte que leur somme forme la hauteur totale du vase : hypothèse que l'on peut adopter, en attendant que l'expérience fasse connoître qu'elle est en effet légitime, ou qu'elle a besoin d'être modifiée. En nommant θ le temps de la chute d'un corps grave par la hauteur α ; t le temps de l'écoulement ; Q la quantité constante d'eau qui sort par G, ou qui passe par H ; x la hauteur IB ; y la hauteur AI ; h la hauteur AB du vase : on aura les équations $Q = \frac{2tG\sqrt{\alpha x}}{\theta}$, $Q = \frac{2tH\sqrt{\alpha y}}{\theta}$, $x + y = h$, lesquelles donnent

$$x = h \times \frac{H^2}{G^2 + H^2},$$

$$y = h \times \frac{G^2}{G^2 + H^2},$$

$$Q = h \times \frac{2\,t\,G \,.\, H \,.\, \sqrt{\alpha\,h}}{\theta\sqrt{(G^2 + H^2)}}.$$

Ces formules fourniront plusieurs Corollaires, selon les relations qu'on voudra, ou qu'on pourra supposer entre les quantités qu'elles renferment.

288. *Scholie.* Le problême se résout semblablement pour un vase composé d'un nombre quelconque de compartimens. En remontant du compartiment le plus bas aux autres successivement, on reconnoîtra de proche en proche la nature et la suite de l'écoulement pour chacun d'eux. Je n'entre pas dans le détail de ces combinaisons, qui est un peu long, et qui n'a d'ailleurs aucune difficulté. Supposons que les eaux de tous les compartimens puissent être censées ne former qu'une séule et même masse continue. Alors, par exemple, dans le vase $ABCD$ (*Fig* 23), qui est composé de trois compartimens BQ, PF, ED, au moyen des cloisons horizontales PQ, EF, percées des petites ouvertures K, H: si l'on nomme h la hauteur entière du vase; x la hauteur dûe à la vîtesse de l'écoulement par le petit orifice G pratiqué au fond du vase; y la hauteur dûe à la vîtesse en K; z la hauteur dûe à la vîtesse en H; Q chacune des quantités égales d'eau, qui passent dans le même temps t, par les orifices G, K, H; θ le temps de la chute d'un corps grave par α; on aura

aura les équations $Q = \frac{2tG\sqrt{ax}}{\theta}$; $Q = \frac{2tK\sqrt{ay}}{\theta}$; $Q = \frac{2tH\sqrt{az}}{\theta}$. De plus, supposons que l'on ait $x + y + z = h$. Par-là, on obtient autant d'équations du premier degré que d'inconnues Q, x, y, z; et par conséquent on pourra déterminer facilement ces inconnues. Je laisse au lecteur le soin d'achever ces calculs, et d'en tirer des Corollaires.

289. Problême II. *Le vase prismatique* ACKB (Fig. 24) *qui communique avec le tuyau* KL, *fermé de tous côtés, excepté à l'endroit* D *où il y a un petit orifice, étant traversé de plusieurs diaphragmes horizontaux* EF, OP, VH, *dans lesquels on a percé les petits trous* G, M, N : *on demande le temps que la surface du fluide met à s'abaisser d'une certaine hauteur, le vase se vidant par l'orifice* D *sans recevoir de nouvelle eau ?*

Je suppose que les eaux des différens compartimens demeurent toujours contiguës les unes aux autres, en vertu de la pression de l'atmosphère, combinée avec leurs hauteurs.

1°. Soit TB la hauteur primitive du fluide dans le vase $ACKB$; et qu'au bout d'un certain temps t, la surface de cette eau parvienne en ab. On trouvera, par l'art. précédent, que pour les deux situations AB, ab, les hauteurs correspondantes dûes aux vitesses en D, sont :

$$TB \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2};$$

$$Tb \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2},$$

expressions dans lesquelles les hauteurs TB, Tb, sont affectées d'un même facteur que je nomme n, pour abréger. De plus, je nomme h, la hauteur indéterminée Tb; A la section horizontale du vase.

Maintenant, supposons que dans un instant dt la surface ab s'abaisse en $a' b'$. La hauteur dûe à la vitesse en D étant $n.h$, on voit (224) que la quantité élémentaire d'eau qui sortira pendant l'instant dt, aura pour valeur $\frac{2dt.D\sqrt{a}.\sqrt{(n.h)}}{\theta}$; ce qui donne, en égalant cette quantité à $A \times aa'$, $dt = \frac{\theta \times A \times aa'}{2D.\sqrt{a}.\sqrt{(n.h)}}$. Or, si l'on imagine pour un moment que tous les diaphragmes soient anéantis, et que le fluide sortant librement par l'orifice D, sous la hauteur h, la quantité élémentaire d'eau, $A \times aa'$, sorte pendant l'instant dt': on aura, $dt' = \frac{\theta \times A \times aa'}{2D.\sqrt{a}.\sqrt{h}}$. Donc, $dt : dt'$ :: $1 : \sqrt{n}$; et le même rapport aura lieu entre les temps entiers t et t'. Ainsi, pour avoir le temps que la surface du fluide met à s'abaisser de AB en EF, dans l'hypothèse du problême, il faut chercher le temps que la surface du fluide mettroit à s'abaisser de la même hauteur, dans l'hypothèse où tous les diaphragmes seroient anéantis; puis diviser ce dernier temps par $\sqrt{n}$.

2°. Lorsque la surface du fluide est parvenue en EF, le mouvement est le même que si le diaphragme EF n'existoit pas; ou, ce qui revient au même, comme si l'orifice G étoit infini par rapport aux autres M, N, D. Faisant donc $G = \infty$, on trouvera que la surface de l'eau étant en EF, la hauteur dûe à la vîtesse en D, est $TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$; et que la surface étant dans la position indéterminée ef, la hauteur dûe à la vîtesse en D, est $Tf \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$. Le temps de l'écoulement qui répond au second compartiment se détermine donc de la même manière que pour le premier.

3°. Pareillement, lorsque la surface de l'eau est en OP, il faut faire $M = \infty$; et le temps de l'écoulement se détermine de même pour le troisième compartiment. Ainsi de suite pour tant de diaphragmes qu'on voudra. Ensuite ajoutant ensemble tous ces temps partiels, on connoîtra le temps total que la surface de l'eau met à s'abaisser d'une hauteur proposée.

290. *Corollaire I.* On voit par les expressions des hauteurs dûes aux différentes vîtesses du fluide en D, qu'à mesure que la surface de l'eau s'abaisse de B en F, la vîtesse en D diminue jusqu'à ce que la surface soit parvenue en F; qu'alors la vîtesse augmente, puis diminue jusqu'à ce que la surface soit parvenue en P; qu'alors elle augmente, puis

diminue jusqu'à ce que la surface soit parvenue en H; qu'alors elle augmente, puis diminue à mesure que la surface continue de descendre; ainsi de suite, s'il y avoit un plus grand nombre de diaphragmes et d'orifices. En effet, un moment avant que la surface de l'eau arrive en EF, cette surface considérée comme étant encore dans le compartiment supérieur est élevée au-dessus du point D, d'une quantité très-peu différente de TF, et qu'on peut par conséquent prendre pour TF; la hauteur dûe à la vîtesse en D est donc alors $TF \times \frac{G^2 M^2 N^2}{G^2 M^2 N^2 + D^2 M^2 N^2 + D^2 G^2 N^2 + D^2 G^2 M^2}$.
Mais quand la surface de l'eau arrive juste en EF, et que par conséquent le compartiment supérieur doit être considéré comme n'existant plus, la hauteur dûe à la vîtesse en D, est $TF \times \frac{M^2 N^2}{M^2 N^2 + D^2 N^2 + D^2 M^2}$.
Or, de ces deux expressions, la première est évidemment moindre que la seconde. Donc, la vîtesse en D, après avoir diminué successivement tant que la surface du fluide descend dans le compartiment AF, augmente à l'instant qu'elle passe dans le compartiment suivant EP. Il en est de même pour les compartimens EP, OH.

291. *Corollaire II.* Les distances des diaphragmes peuvent être tellement réglées, que le jet par l'orifice D, varie en raison donnée à mesure que le fluide passe d'un compartiment à l'autre. Car, supposons, par exemple, que toutes les ouvertures G, M, N, D

soient égales : si nous voulons que les vîtesses en D soient égales, lorsque la surface du fluide est successivement en B, F, P, H, nous égalerons entr'elles les hauteurs dûes à ces vitesses, et par-là nous aurons $TB \times \frac{1}{4} = TF \times \frac{1}{3} = TP \times \frac{1}{2}$; donc $TH = HP = PF = FB$. D'où l'on voit que les hauteurs TB, TF, TP, TH étant en progression arithmétique décroissante dont la raison est TH, la vîtesse en D sera constamment dûe à la hauteur TH, quand la surface du fluide sera en B, F, P, H.

Cette théorie est conforme à une expérience de Mariotte. Voyez la *Fig.* 83 de son *Traité du Mouvement des Eaux*, avec le Discours qui y est relatif. L'explication que l'Auteur donne de cette expérience, est erronée.

292. *Corollaire III.* La même théorie est facilement applicable à l'hypothèse où le réservoir contiendroit des fluides différens. Car soit (*Fig.* 25), un vase pareil à celui de la *Fig.* 24; mais pour plus de simplicité, n'y mettons que deux diaphragmes EF, OP, avec les petites ouvertures M, N, D. Que les trois compartimens $AEFB$, $EOPF$, $OCKLP$ contiennent trois fluides de différentes espèces. Supposons qu'au premier instant où la surface du fluide supérieur est en AB, la vîtesse de ce fluide en M, soit dûe à la hauteur BS analogue à BF; la vîtesse du fluide $EOPF$ en N, soit dûe à la hauteur SV analogue à FP; la vîtesse du fluide $OCKLP$, en D, soit dûe à la hauteur TV analogue à TP. Ayant nommé x la hauteur BS; y, la hauteur

SV; z, la hauteur VT; θ, le temps de la chute par a; Q, chacun des volumes égaux de liqueur qui passent par chacune des trois ouvertures M, N, D, dans un même temps t que je suppose infiniment petit, pour que la surface AB ne s'abaisse pas, du moins sensiblement : on aura d'abord (224), pour la dépense de l'ouverture M, $Q = \frac{2tM\sqrt{ax}}{\theta}$; pour la dépense de l'ouverture N, $Q = \frac{2tN\sqrt{ay}}{\theta}$; pour la dépense de l'ouverture D, $Q = \frac{2tD\sqrt{az}}{\theta}$: ces équations donnent $\frac{M^2 x}{N^2} = y$, $\frac{M^2 x}{D^2} = z$.

Cela posé, en faisant de plus la pesanteur spécifique du fluide $AEFB = \varpi$; celle du fluide $EOPF = \varpi'$; celle du fluide $OCKLP = p$; $BF = b$; $FP = c$; $PT = f$; et observant que si l'on réduit toutes les hauteurs BS et BF, SV et FP, VT et PT, qui répondent seulement deux à deux à un même fluide, à des hauteurs analogues à BS et BF : on aura (52) l'équation $x + \frac{\varpi' y}{\varpi} + \frac{pz}{\varpi} = b + \frac{\varpi' c}{\varpi} + \frac{pf}{\varpi}$; ou bien, $\varpi x + \varpi' y + pz = \varpi b + \varpi' c + pf$. Comparant cette équation avec les précédentes, on trouvera

$$x = \frac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$$

$$y = \frac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + pf)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$$

$$z = \frac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + p f)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}.$$

Les hauteurs dûes, pour le premier instant, aux vîtesses en M, N, D, étant ainsi déterminées, supposons qu'après un certain temps la surface du fluide supérieur se soit abaissée en ab; et qu'en conséquence la surface du second soit descendue en ef, celle du troisième en op. Il est clair qu'on aura toujours $bf = BF$, $fp = FP$, et que la seule hauteur Tp du dernier fluide est variable. Ainsi en nommant k la hauteur Tp, on trouvera, par la même méthode, que pour cette position quelconque des trois fluides,

la hauteur dûe à la vîtesse en M $\Big\} = \dfrac{N^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + p k)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$

la hauteur dûe à la vîtesse en N $\Big\} = \dfrac{M^2 D^2 (\varpi b + \varpi' c + p k)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2},$

la hauteur dûe à la vîtesse en D $\Big\} = \dfrac{M^2 N^2 (\varpi b + \varpi' c + p k)}{\varpi N^2 D^2 + \varpi' M^2 D^2 + p M^2 N^2}.$

293. *Corollaire IV.* Pour faire une application très-simple de l'article précédent, supposons qu'il n'y ait que deux fluides, ou que le fluide supérieur $AEFB$ soit anéanti avec le diaphragme EF; que $OCKLP$ soit de l'eau, et $EOPF$ de l'air. On aura d'abord $b = 0$, $M = \infty$, $\frac{\varpi'}{p} = \frac{1}{850}$. De plus, les pressions de l'air extérieur sur N et sur D se faisant équilibre, il faut supposer $c = 0$. Donc la hauteur dûe à la vîtesse de l'air à son passage en

N est exprimée par $k \times \frac{D^2 \times 850}{D^2 + 850\,N^2}$; et la hauteur dûe à la vitesse de l'eau au sortir de l'orifice D est exprimée par $k \times \frac{N^2 \times 850}{D^2 + 850\,N^2}$. Lorsque l'ouverture D est infiniment petite par rapport à l'ouverture N, la première hauteur devient nulle, et la seconde devient k, comme cela doit être. Si les deux ouvertures N, D sont égales, les vitesses de l'air en N, et de l'eau en D sont égales, et les hauteurs qui leur sont dûes, sont exprimées chacune par la même quantité $\frac{850}{851}\,k$.

On peut, à l'aide de cette théorie, prendre une idée claire et précise de la vitesse avec laquelle le vin sort d'un tonneau par un trou fait à l'un de ses fonds, quand l'ouverture pratiquée à la paroi supérieure, et destinée à introduire de l'air dans le tonneau, est fort petite.

(294.) Problème III. *La liqueur du vase* ABCD (Fig. 26), *entretenu constamment plein à la hauteur* AB, *passant par l'ouverture* M *dans le vase latéral* CEGF *fermé de tous cotés, excepté en* N, P, *où il y a deux petites ouvertures par lesquelles la liqueur a la liberté de sortir : on demande les hauteurs dûes aux vitesses en* M, N, P, *et les quantités des écoulemens ?*

Supposons que la liqueur en passant du vase $ABCD$ dans le vase $ECFG$, éprouve en chaque point de l'orifice M une réaction exprimée par

MH, de la part de l'eau contenue dans le réservoir $ECFG$, et des parois de ce même réservoir. Il est évident qu'ayant mené les horisontales NV, HK, les hauteurs dûes respectivement aux vîtesses en M, N, P sont exprimées par les verticales DH, HV, HC. Ainsi en nommant t le temps de l'écoulement ; θ le temps de la chute par α ; h, la hauteur DC ; b, sa partie DV ; x, la hauteur DH ; Q, la quantité d'eau qui passe par M ; q, celle qui sort par N ; q', celle qui sort par P : on aura (224),

$$Q = \frac{2tM\sqrt{\alpha x}}{\theta} ; \quad q = \frac{2tN\sqrt{[\alpha(b-x)]}}{\theta} ;$$

$$q' = \frac{2tP\sqrt{[\alpha(h-x)]}}{\theta}. \text{ De plus, } q + q' = Q.$$

Ces équations donnent $M\sqrt{x} = N\sqrt{[b-x]} + P\sqrt{[h-x]}$ qui se réduit à une équation du second degré, de laquelle on tirera x. Connoissant x, on connoîtra HV, HC, Q, q, q'.

(295.) *Corollaire*. Les hauteurs HV, HC, dûes aux vîtesses en N et P sont évidemment celles des colonnes qui presseroient perpendiculairement les parois du vase $ECFG$ aux mêmes endroits, si l'on imaginoit que tout d'un coup les orifices N et P fussent bouchés. Ainsi la pression que souffre une partie X prise en un endroit donné des parois du réservoir $ECFG$, quand la liqueur sort par les ouvertures N et P, est exprimée par $X \times HC$.

Par exemple, supposons l'ouverture P infiniment petite, ou $P = 0$. L'équation générale $M\sqrt{x}$

$= N \surd [b - x] + P \surd [h - x]$ deviendra $M \surd x = N \surd [b - x]$; d'où l'on tire $x = \frac{N^2 b}{M^2 + N^2}$, et par conséquent $C H = h - x = \frac{M^2 h + N^2 (h - b)}{M^2 + N^2}$. Donc la pression de $X = \frac{X [M^2 h + N^2 (h - b)]}{M^2 + N^2}$.

On détermineroit de la même manière la pression contre tout autre point des parois du réservoir $E C F G$, et même du réservoir $A B C D$. Mais on ne doit pas oublier que cette détermination suppose que les ouvertures M, N, P sont fort petites, et que les eaux sont comme stagnantes dans les deux réservoirs. Elle ne pourroit par conséquent pas être employée sans erreur, si les eaux avoient une vîtesse sensible dans l'un ou l'autre réservoir. On a indiqué (261) la méthode pour déterminer en général la pression que l'eau mue dans un tuyau, exerce contre les parois de ce tuyau.

CHAPITRE VIII.

De l'écoulement de l'eau qui sort par un petit orifice, d'un vase en mouvement.

296. Les Problêmes dont je vais donner ici la solution, peuvent avoir leur application dans la pratique. Si, par exemple, un seau, rempli d'abord d'eau, monte ou descend d'un mouvement qui ne soit pas uniforme, et qu'on veuille déterminer la hauteur dûe à la vitesse de l'écoulement par un petit orifice pratiqué en un endroit donné du fond ou des parois, afin de parvenir à connoître la quantité d'eau qui sortira en un temps donné par cet orifice : si de même on veut déterminer la position qu'une masse fluide doit prendre dans un vase qu'on fait mouvoir d'un mouvement accéléré ou retardé sur un plan, et la pression qui résulte contre un point quelconque du vase, etc. : toutes ces questions demandent, pour être résolues, de nouveaux principes qu'il est à-propos d'exposer, non-seulement à raison de l'utilité du sujet, mais encore pour exercer nos lecteurs à l'usage de la Dynamique et de l'Hydraulique. Je prends des cas simples pour plus de clarté.

297. Problème I. *Le vase* ABCD (Fig. 27), *rempli d'abord jusqu'en* AD, *étant soulevé ver-*

ticalement par le poids P, *au moyen de la petite corde inextensible et non-pesante* HMNP, *qui passe sur les deux poulies de renvoi* M *et* N : *on demande la pression du fluide sur la partie infiniment petite* pq *du fond ou des parois, ou la hauteur dûe à la vîtesse de l'écoulement par cet endroit?*

Soit G le centre de gravité de la masse totale du vase et de l'eau qu'il contient pour un instant proposé; et nommons M cette masse. Supposons que si les deux corps, ou les deux masses P et M, avoient été abandonnés à l'action libre de la pesanteur, ils eussent parcouru, en un instant, les petits espaces égaux Pt, Gx; mais qu'à cause de l'action et de la réaction que ces deux corps exercent l'un sur l'autre, P parcoure Pk, et M, Gy. La quantité de mouvement perdu par le premier étant égale à la quantité de mouvement que gagne le second dans le même sens : si l'on nomme g la gravité; f, la force accélératrice simple Pk ou Gy : on aura l'équation, $P(g-f) = M(g+f)$; d'où l'on tire $f = \frac{g(P-M)}{P+M}$; et par conséquent $xy = x\,G + G\,y = g + \frac{g\,(P-M)}{P+M}$ $= \frac{2gP}{P+M}$, expression de la force qui pousse de bás en haut chaque particule de la masse M; de sorte que si l'on imprimoit un mouvement égal et contraire au système de toutes ces particules, il demeureroit en équilibre. Or, dans ce dernier cas,

en vertu de la force $\frac{2gP}{P+M}$, qui agit verticalement de haut en bas sur chaque molécule du fluide, il doit résulter contre un point quelconque du fond ou des parois, une pression qui est à la pression que le même point supporteroit si le fluide étoit soumis à la seule action de la pesanteur, comme $\frac{2gP}{P+M}$ est à g, ou comme $2P$ est à $P+M$. Ainsi, en nommant h la hauteur Rq de l'eau dans le vase $ABCD$ regardé comme immobile : la hauteur dûe à la vitesse en pq, dans l'hypothèse du problême, sera $h \times \frac{2P}{P+M}$; et cette même quantité représente par conséquent la pression de l'eau sur chaque point de pq.

298. *Corollaire I.* Donc, pour avoir la quantité élémentaire d'eau dQ, qui sort pendant l'instant dt, il ne faut que mettre dans l'article 224, $h \times \frac{2P}{P+M}$ pour h, dt pour t, dQ pour Q, en conservant les autres dénominations. Par-là, on aura, $dQ = \frac{2dt.K}{\theta} \sqrt{\frac{2\alpha hP}{P+M}}$.

299. *Corollaire II.* Le vase étant supposé se vider par l'orifice pq, sans recevoir de nouvelle eau, nous aurons (en nommant maintenant x la hauteur variable Rq; X la section horizontale AD du vase à la surface de l'eau, laquelle section est une fonction de x, donnée par la figure

du vase), nous aurons, dis-je, $dQ = -Xdx$; $M = A + \int X\,dx$, A étant une constante. Donc $-Xdx = \frac{2dt.K}{\theta} \sqrt{\frac{2\alpha P x}{P + A + \int X dx}}$, ou $dt = \frac{-\theta X dx \sqrt{(P + A + \int X dx)}}{2K\sqrt{2\alpha P}.\sqrt{x}}$, équation d'où l'on tirera la relation entre x et t.

300. *Corollaire III.* Supposons que le vase soit un solide de révolution, dont Rq est l'axe; et qu'on demande la figure qu'il doit avoir, afin qu'en temps égaux la surface de l'eau s'abaisse de quantités égales : il faudra faire $dt = -n\,dx$, n étant un coëfficient donné; ensuite on supposera l'ordonnée $RA = RD = y$, et par conséquent $X = m\,y^2$, m étant le rapport de la circonférence au diamètre; on fera disparoître les radicaux, et on mettra l'expression $\int X dx$ ou $\int m y^2 dx$ toute seule dans un membre; on différentiera, ce qui produira une équation de cette forme, $y^7 dx + By dx + Cx dy = 0$, B et C étant des constantes données : d'où l'on tire l'équation *séparée* $\frac{dx}{x} = -\frac{Cdy}{y^7 + By}$.

301. *Remarque.* On voit par l'équation $f = \frac{g(P-M)}{P+M}$, que si $P = M$, on aura $f = 0$, $\frac{2P}{P+M} = 1$. Alors le vase est en repos, au moins pour un instant; et la quantité élémentaire d'eau, qui sort pendant cet instant, est $\frac{2dt.K\sqrt{\alpha h}}{\theta}$.

Si $P = 0$, on aura $\frac{2P}{P+M} = 0$. La pression du fluide sur pq s'évanouit, et il ne sortira point d'eau par l'orifice pq. C'est ce qui est d'ailleurs évident, car tous les points de la masse M descendront par la pesanteur naturelle, avec la même vîtesse.

Si le poids P est infini, il faut négliger M en comparaison de P; et alors $\frac{2P}{P+M} = 2$. Ainsi, $d \cdot Q = \frac{2\,dt\,K\sqrt{2gh}}{\theta}$.

Si les deux poids P et M étant des quantités finies, on avoit $M > P$, le poids M descendroit, le poids P monteroit; et pour déterminer l'écoulement, il ne faudroit que faire f négative. On trouve dans ce cas, comme dans le premier, que la hauteur dûe à la vîtesse en pq, est $h \times \frac{2P}{P+M}$.

302. Problème II. *Le vase* ABCD (Fig. 28) *qui contient de l'eau, étant entraîné le long du plan horizontal* FQ, *au moyen du poids* P *attaché à la corde inextensible et non pesante* HNP, *qui passe sur la poulie* N *de renvoi : on demande la position que doit avoir la surface du fluide, lorsqu'elle est parvenue à un état uniforme et permanent, et la pression que souffrira un point quelconque du fond ou des parois du vase ?*

Soit M la somme des masses du vase et de l'eau qu'il contient. Supposons qu'en un instant le corps P

eût parcouru, par sa pesanteur naturelle, le petit espace Pt, mais qu'à cause du corps M qu'il entraîne, il ne parcoure que Pk, tandis que M parcourt horizontalement un espace qui est égal à Pk. En nommant g la gravité naturelle; f, la force accélératrice Pk; nous aurons l'équation $P(g-f)=Mf$, ou $f=\frac{gP}{P+M}$. D'où l'on voit que chaque particule du fluide est poussée dans le sens FQ, par une force $\frac{gP}{P+M}$, et que si par conséquent on imprimoit une force égale et contraire au système, il demeureroit en repos. Or, dans ce dernier cas, chaque particule fluide est soumise à l'action de deux forces, l'une verticale qui est la pesanteur g, l'autre horizontale qui est $\frac{gP}{P+M}$; et ces deux forces produisent une résultante exprimée par $g\times\frac{\sqrt{[P^2+(P+M)^2]}}{P+M}$. Ainsi, pour qu'il y ait équilibre dans le fluide, ou pour que le fluide prenne un état fixe et permanent, il faut que la surface de ce fluide coupe perpendiculairement la direction de la résultante que nous venons de trouver; et comme cette même force est toujours constante en quantité et en direction, on voit évidemment que la surface du fluide doit être un plan incliné OM, tel que menant l'horizontale OE, on ait $\frac{OE}{OM}=\frac{P+M}{\sqrt{[P^2+(P+M)^2]}}$.

Il est clair que les lignes OE, OM sont données de

de grandeur. La position du point O se détermine par la considération de la figure du vase et de la quantité de fluide qui y est contenu. Car, soit par exemple, $ABCD$ un vase rectangulaire : que ce vase étant en repos, et que par conséquent la surface du fluide, devenue horizontale, occupe la position IL, à laquelle répond la hauteur donnée CI : on aura, $CI \times CB = \frac{(OC + BM) \times CB}{2}$; ou $2\,CI = 2\,OC - ME$; ou $OC = CI + \frac{ME}{2}$, équation dont tout le second membre est connu, puisque $ME = \sqrt{[(OM)^2 - (OE)^2]}$, quantité connue.

Cela posé, si d'un point quelconque T des parois du vase, on tire la droite TZ perpendiculaire à la surface OM du fluide, on verra que la pression soufferte par l'aire infiniment petite Tt, dans l'hypothèse de notre problème, est à la pression qu'elle souffriroit sous la profondeur TZ, si le fluide étoit soumis à la seule action de la pesanteur dans un vase en repos, comme $\frac{g\sqrt{[P^2 + (P+M)^2]}}{P+M}$ est à g, ou comme $\sqrt{[P^2 + (P+M)^2]}$ est à $P+M$. Par conséquent la première pression sera représentée par $\frac{Tt \times TZ \times \sqrt{[P^2 + (P+M)^2]}}{P+M}$.

303. *Corollaire.* Connoissant la pression sur Tt, on connoitra la vitesse avec laquelle l'eau sortira à l'instant que l'on fera une petite ouverture en Tt.

Si à mesure que le vase marche horizontalement il perd de l'eau sans en recevoir de nouvelle, la force accélératrice qui anime à chaque instant les particules du fluide, varie continuellement, tant en quantité qu'en direction. Alors la determination de l'écoulement appartient à la classe des problèmes du Chapitre V, où il est question du mouvement d'un fluide animé de forces quelconques.

304. *Remarque.* On doit observer que le vase ne perdant point d'eau, la surface du fluide demeure inclinée et conserve toujours la même inclinaison, tant que le mouvement du corps P dure, et que ce mouvement est uniformément accéléré. Mais si le vase, après s'être mu pendant un certain temps, d'un mouvement uniformément accéléré, parvient au repos ou à un mouvement uniforme, la surface de l'eau perd la position inclinée, et finit par se mettre dans un plan horizontal. C'est ce qui est évident par notre solution; car alors on peut supposer $P = 0$; la force f est nulle, et la surface de l'eau, qui doit être perpendiculaire à la direction de la force qui presse chaque particule située dans cette même surface, est nécessairement horizontale, puisqu'il n'y a plus que la pesanteur naturelle qui agisse sur les particules du fluide.

On résoudroit le problème avec la même facilité, si le vase glissoit sur un plan incliné. Mais en voilà assez sur cette matière.

CHAPITRE IX.

Du mouvement oscillatoire de l'eau dans un siphon.

305. J'AI démontré dans mon Traité de *Mécanique* (*II*e. *part. liv. II, chap. III*), les principales propriétés du mouvement des pendules. On y a vu que si un corps ou pendule P (*Fig.* 29), suspendu par le moyen du fil OP, décrit de petits arcs de cercle Pp, Qq, en oscillant autour du point fixe O, toutes ces oscillations sont *isochrones* ou de même durée, quoique les arcs parcourus Pp, Qq, soient inégaux : on y a vu aussi que les durées des petites oscillations de deux pendules de longueurs inégales, sont entr'elles comme les racines carrées de ces longueurs. Le mouvement de l'eau qui se balance dans un siphon, est du même genre.

306. Problème I. *Déterminer le mouvement d'oscillation d'un fluide dans un siphon* KLNM (Fig. 30), *de grosseur uniforme intérieure, et composé de deux branches verticales et d'une branche horizontale ?*

Supposons d'abord que le fluide, dans l'état de repos, occupe l'espace $ALND$: alors les deux surfaces AB, CD sont de niveau (19). Supposons ensuite que par une cause quelconque, telle, par exemple, que l'action d'un piston, la liqueur soit

forcée de descendre en GH dans la branche MN, et par conséquent de s'élever en EF dans la branche KL; que cela fait, on ôte subitement le piston, de manière que le fluide soit abandonné uniquement à l'action libre de sa pesanteur. Il est clair que l'eau descendra et montera alternativement, formant des oscillations semblables à celles d'un pendule qui va et vient.

Soit P (*Fig.* 29), un pendule dont la longueur OP est la moitié de la longueur xyz de la colonne fluide, et qui décrit jusqu'au point le plus bas I des arcs PI égaux aux espaces EA. La force qui fait osciller le fluide est l'excès du poids de l'eau contenue dans l'une des branches du siphon, sur le poids de l'eau contenue dans l'autre branche. Ainsi, quand l'eau monte en EF dans la branche KL, et que conséquemment elle descend en GH dans la branche MN, cette force est le poids de la colonne $ESTF$, ou le double du poids de la colonne $EABF$. Elle est donc au poids de toute l'eau comme $2AE$ est à xyz, ou comme AE est à OP. D'où il suit, 1°. que la longueur xyz étant une quantité constante, la force qui fait osciller l'eau est toujours proportionnelle à l'espace qu'elle lui fait parcourir; et que par conséquent les oscillations de l'eau sont isochrones entr'elles. 2°. Ces oscillations sont de même durée que celles du pendule P; car la force qui fait décrire au pendule P le petit arc PI, est à la pesanteur du même pendule, comme PI est à OP, ou comme AE est à OP; l'eau et le pendule sont

donc animés par la même force, et doivent par conséquent faire leurs oscillations dans le même temps.

307. *Corollaire.* Puisque les oscillations de l'eau suivent les mêmes loix que celles des pendules, si l'on augmente ou diminue la longueur de la colonne d'eau, le temps de ses oscillations augmentera ou diminuera, et suivra la raison sou-doublée de cette longueur.

308. Problème II. *Déterminer en général les oscillations de l'eau dans un siphon de figure quelconque ?*

Soit $KLMN$ (*Fig.* 31), un siphon de figure quelconque, contenant un fluide qui, ayant été élevé vers K, par une cause extérieure quelconque, est parvenu dans la position indéterminée $EFGH$, où il est soumis uniquement à l'action de sa pesanteur. Ce fluide fera des oscillations qu'il s'agit de déterminer. Il faut, pour cela, connoître la direction que les particules du fluide prennent dans leurs mouvemens. Or, en employant ici le principe du parallélisme des tranches, on peut supposer, ou que ces tranches sont horizontales, ou qu'elles sont perpendiculaires à la courbe $Kghm$, regardée comme l'axe du siphon. Le calcul, dans la première hypothèse, se rapporte à l'article 252, puisque l'on peut considérer, pour un instant, $EFGH$ comme un vase ou un tuyau, dont EF est la surface supérieure du fluide, GH l'inférieure. La

vais résoudre la question, dans la seconde hypothèse, qui a été adoptée par plusieurs savans Géomètres.

I. Imaginons donc que le fluide $EFGH$ est partagé en une infinité de tranches $LOol$, égales entr'elles et perpendiculaires en chaque point de la courbe gfh. La pesanteur qui agit verticalement sur chaque tranche, se décomposera en deux forces, l'une perpendiculaire à la courbe, qu'il faut négliger, l'autre dirigée suivant la courbe, la seule à laquelle il faille avoir égard.

Soient
- la gravité . . . . $= g$,
- la surface EF . . . . $= P$,
- la surface GH . . . . $= Q$,
- la section LO . . . . $= y$,
- l'arc gf de la courbe gfh . . . . . . $= x$,
- le sinus total . . . . $= 1$,
- l'angle mfn que fait la courbe en f avec la verticale . . . . $= p$,
- la vitesse de la surface EF . . . . . . $= u$,
- la hauteur dûe à cette vitesse . . . . . $= r$,
- la vitesse de la section LO . . . . . . $= v$.

Cela posé, il est clair que la partie de la pesanqui agit suivant fn, étant exprimée par $g \cos. p$, si les tranches n'agissoient point les unes sur les autres, la vitesse v, à la fin de l'instant dt, deviendroit $v + g \cos. p . dt$; mais, comme à cause du mouvement forcé des tranches elle devient $v + dv$, on voit que les différentes tranches animées de la vitesse $g \cos. p . dt - dv$, se feroient équilibre. On aura donc, $\int dx\,(g \cos. p . dt - dv) = 0$; d'où

l'on tire (en mettant pour dt sa valeur $\frac{dx}{v}$, pour v sa valeur $\frac{Pu}{y}$), $\frac{gydx}{Pu}\int \cos. p . dx - P du \int \frac{dx}{y} + P u y dx . \int \frac{dy}{y^3} = 0$.

Les intégrales indiquées doivent répondre à la courbe entière gfh. Soient donc alors $\int \cos. p . dx = F$; $\int \frac{dx}{y} = N$; et considérons que $\int \frac{dy}{y^3} = \frac{1}{2P^2} - \frac{1}{2Q^2}$: l'équation précédente deviendra,

$$(A)\ F . Q^2 y dx - P^2 Q^2 N dr + r y dx (Q^2 - P^2) = 0.$$

Telle est la formule qui donne le mouvement du fluide pour un instant quelconque.

II. Maintenant, supposons qu'au premier instant du mouvement, le fluide occupe l'espace $VZRN$; et nommons z l'espace Kg parcouru par la surface EF pendant le temps t. Il est clair que la nature de la courbe $KghM$ étant donnée, et les deux espaces $VZRN$, $EFGH$, occupés successivement par le fluide, étant égaux entre eux, les quantités F, N, P, Q, ydx, peuvent être exprimées en fonctions de z et de constantes. Donc la vitesse u de la surface EF, ou la hauteur r dûe à cette vitesse, sera aussi une fonction de z; et pareillement t sera un fonction de z, à cause de $dt = \frac{dz}{u}$.

Appliquons cette théorie générale à des exemples.

309. Exemple I. *Le siphon est cylindrique, et la courbe* KghM *est une demi-circonférence de cercle, dont le diamètre* KM *est horizontal.*

On aura, en ce cas, $P = Q = y$, et chacune de ces quantités sera constante. Soit menée au diametre KM l'ordonnée fq; et supposons le rayon $CK = 1$; la demi-circonférence $KghM = m$; l'arc donné gfh, auquel répond le fluide dans toutes les situations $= n$; $fq = s$; l'arc indéterminé $Kgf = \xi$. On aura, $\cos. p = \frac{ds}{d\xi}$ $= \frac{d(\sin. \xi)}{d\xi} = \cos. \xi$; $\int dx \cos. p = \int dx \cos. \xi$ $= \int d\xi \cos. \xi = \sin. \xi + A$, intégrale qui doit commencer lorsque $\xi = z$, et finir lorsque $\xi = z + n$. Ainsi, $F = \sin. (z + n) - \sin. z$. De plus, $N = \frac{n}{P}$; $y\,dx = P\,dz$. Donc l'équation (A) deviendra ici, $dz\,[\sin. (z + n) - \sin. z]$ $- n\,dr = 0$; d'où l'on tire (en supposant que le fluide parte du point K, et par conséquent $r = 0$, lorsque $z = 0$), $nr = \cos. n - 1 + \cos. z$ $- \cos. (z + n)$. Ce qui donne r ou la hauteur dûe à la vitesse de la surface EF.

Si l'on fait $z = m - n$, ou si l'on suppose que la surface antérieure GH parvienne en M, on trouvera encore $r = 0$. D'où il suit qu'alors le fluide aura perdu toute sa vitesse, et qu'il redescendra. Il continuera ainsi à faire des oscillations réciproques, suivant la demi-circonférence, depuis le point K jusqu'au point M.

On trouvera la durée de ces oscillations par le moyen de l'équation $dt = \frac{dz}{u} = \frac{dz}{\sqrt{2gr}}$
$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{[\cos. n - 1 + \cos. z - \cos. (z + n)]}}$,
équation qu'il faudra intégrer de manière que t s'évanouisse lorsque $z = 0$, et que t reçoive sa valeur complète, lorsque $z = m - n$.

310. Exemple II. *Le siphon* (Fig. 32) *est composé de trois tuyaux rectilignes* KLO, OLNR, RNM, *qui ont des diamètres égaux, et dont l'intermédiaire est horizontal; les deux autres sont inclinés.*

Soient élevées, par les points f et m, les verticales fi, ms; et nommons f, le cosinus de l'angle donné Kfi; m, le cosinus de l'angle donné Mms; P, la la section constante et perpendiculaire de chaque tuyau; l, la longueur donnée $gfmh$ de l'espace occupé par le fluide; b, la longueur donnée Kf du premier tuyau incliné; c, la longueur donnée du tuyau horizontal; z, l'espace Kg parcouru par la surface du fluide pendant le temps t.

Cela posé, comme la loi de continuité n'est pas observée d'un tuyau à l'autre, on appliquera à chacun d'eux les raisonnemens de la solution générale; et on trouvera que pour le tuyau $EFOL$, la quantité $\int dx \cos. p$ est $f(b - z)$; que pour le tuyau $GHNR$, elle est $mh \times m = m(z + l - b - c)$; qu'enfin pour le tuyau horizontal, elle est zéro. Retranchant la seconde expression,

de la première (parce que le signe de m est contraire à celui de f), le reste $f(b-z)-m(z+l-b-c)$, sera la valeur de F pour le siphon entier. De plus, la quantité $\int \frac{dx}{y}$ ou N, sera ici $\frac{l}{P}$. Par conséquent l'équation générale (A) deviendra (en observant que $y=P$, $dx=dz$, $Q=P$), $dz[f(b-z)-m(z+l-b-c)]-l\,dr=0$; d'où l'on tire $r=\left(\frac{f+m}{2l}\right)\times\left[\frac{2(fb+mb+mc-ml)z}{f+m}-zz\right]$. Donc, à cause de $dt=\frac{dz}{u}=\frac{dz}{\sqrt{2gr}}$, on aura

$$t=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{[g(f+m)]}}\times\int\frac{dz}{\sqrt{\left(\frac{2(fb+mb+mc-ml)z}{f+m}-zz\right)}},$$

intégrale qui dépend en général de la quadrature du cercle. Représentons, pour abréger, le coëfficient de z par $2A$. De plus, nommons B le quart de circonférence pour le rayon A; T, le temps employé à parcourir l'espace A. On aura $t=\frac{\sqrt{l}}{A\sqrt{[g(f+m)]}}\times\int\frac{A\,dz}{\sqrt{(2Az-zz)}}$; et $T=\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{[g(f+m)]}}\times\frac{B}{A}$. Or $\frac{B}{A}$ est une quantité constante, quel que soit le rayon A. Donc T est une quantité constante; donc les oscillations entières du fluide sont isochrones entr'elles, quelles que soient leurs amplitudes.

Soient L la longueur d'un pendule qui décrit de

petits arcs de cercle; C, la distance initiale de ce pendule à la verticale; D, le quart de circonférence pour le rayon L; z, l'espace que le pendule parcourt circulairement, pendant le temps t, avec la vitesse v; T', le temps qu'il emploie pour arriver à la verticale. On aura $v\,dv = \frac{g(C-z)\,dz}{L}$, et par conséquent $vv = \frac{g(2Cz-zz)}{L}$. Donc $t = \int \frac{dz}{v} = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \int \frac{dz}{\sqrt{(2Cz-zz)}}$, et $T' = \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}} \times \frac{D}{C}$. Égalant cette valeur de T' à celle de T, et considérant que $\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$, on aura $L = \frac{l}{f+m}$, expression de la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans le même temps que le fluide. Ce résultat s'accorde avec celui qui a été donné sans démonstration par Jean Bernoulli. (Voyez ses *Œuvres, tome III*, page 125.)

Lorsque les tuyaux $EFOL$, $HGRN$ sont verticaux, on a $f = 1$, $m = 1$; et l'équation $L = \frac{l}{f+m}$ devient $L = \frac{1}{2}l$, c'est-à-dire, que la longueur du pendule qui fait ses oscillations dans le même temps que le fluide, est la moitié de la longueur de la colonne fluide; ce qui s'accorde avec l'article 306.

311. *Scholie I.* On voit que la même théorie est également applicable au mouvement de l'eau dans un long tuyau, en supposant que les tranches du fluide, regardées comme perpendiculaires à l'axe

du tuyau, conservent leur parallélisme. Nous avons donné (252) la solution de ce problème, dans la supposition du parallélisme de tranches horizontales; nous avons de plus déterminé (261) la pression qui doit résulter alors contre un endroit quelconque des parois du tuyau. Mais dans l'hypothèse présente, où nous regardons les tranches comme perpendiculaires à l'axe du tuyau, on obtiendra d'autres résultats. La vitesse du fluide se trouve par l'équation générale de l'article précédent. Quant à la mesure de la pression, on voit que la force accélératrice en vertu de laquelle toutes les tranches se feroient équilibre, étant ici $g \cos. p - \frac{dv}{dt}$, la pression à l'endroit f (*Fig.* 31), est $\int dx \left(g \cos. p - \frac{dv}{dt}\right)$.

312. *Scholie II.* Newton, dans ses *Principes mathématiques* (*liv. II, prop.* 46), compare, comme il suit, au mouvement oscillatoire de l'eau dans un siphon, le mouvement d'ondulation d'une masse fluide indéfinie, qui a été dérangée de la situation d'équilibre par l'action du vent, ou de toute autre manière.

Soit $ABCDEF$ (*Fig.* 33) une eau agitée, dont la surface monte et descend par des ondes successives. Que A, C, E soient les éminences de ces ondes; B, D, F les cavités intermédiaires qui les séparent. Le mouvement successif des ondes se faisant de manière que les parties les plus hautes A, C, E deviennent ensuite les plus basses, et la

force qui fait descendre les plus hautes et monter les plus basses, étant toujours le poids de l'eau élevée, il s'ensuit que les oscillations des ondes sont de même espèce que celle de l'eau dans un siphon de grosseur uniforme. Si l'on prend donc un pendule dont la longueur soit la moitié des distances entre les lieux les plus hauts A, C, E, et les lieux les plus bas B, D, F, les parties les plus hautes A, C, E, deviendront les plus basses dans le temps d'une oscillation de ce pendule; et dans le temps d'une autre oscillation, elles deviendront les plus hautes. Le pendule fera donc deux oscillations pendant chacune des *ondulations*, c'est-à-dire, pendant que chaque onde parcourra l'espace compris entre deux sommités voisines ou deux cavités voisines; espace qui exprime la largeur d'une onde. Et comme un pendule dont la longueur seroit quadruple de celle du précédent, ne feroit qu'une oscillation, pendant que celui-ci en fait deux, on doit conclure que les ondes font leurs oscillations dans le même temps qu'un pendule qui auroit pour longueur la largeur des mêmes ondes. Les durées des ondulations étant comme les racines carrées de leurs longueurs, on déterminera les quantités de ces durées, par la considération qu'un pendule qui a 3 pieds 8 $\frac{1}{2}$ lignes de longueur, fait une oscillation en une seconde, à la latitude de Paris.

Il est inutile de remarquer que cette théorie des ondulations, n'est, comme Newton en avertit lui-même, qu'une approximation; car on y suppose

que les parties de l'eau se meuvent en lignes droites, comme dans le siphon de l'Article 306; au lieu que réellement leur mouvement est circulaire en partie.

Le mouvement des ondes ne peut être déterminé d'une manière exacte et satisfaisante, que par les loix générales du mouvement des fluides, telles que nous les avons indiquées (Chap. V). M. de la Place a traité le premier ce sujet, pour les ondulations rectilignes (*Acad. de Paris, année* 1776, page 542); et M. de la Grange a traité la question en général (*Acad. de Berlin, année* 1781, page 196).

CHAPITRE X.

Manière d'avoir égard au frottement de l'eau contre les bords d'un orifice, ou contre les parois d'un long tuyau.

313. DANS la théorie que j'ai donnée jusqu'ici de l'écoulement des fluides, je n'ai point fait entrer en considération le déchet que le frottement contre les bords de l'orifice ou contre les parois du vase, peut apporter au produit. Ici je me propose d'indiquer les moyens d'estimer ce déchet, au moins à-peu-près. Je prends des cas simples, pour ne pas m'engager dans de longs calculs, inutiles à mon but.

314. Problème I. *Un vase étant entretenu constamment plein à la même hauteur, au-dessus d'un petit orifice horizontal et circulaire* ABDE (Fig. 34) : *on demande la quantité d'eau écoulée, pendant un temps donné, en ayant égard au frottement du fluide contre les bords de l'orifice ?*

Du centre C, soient décrites une infinité de circonférences concentriques $abde$, $mnop$, etc. Les particules qui frottent contre le bord $ABDE$ de l'orifice perdent, par cette cause, une partie de leur vitesse. Et comme ces particules ont une adhérence avec les suivantes qui forment la circonférence $abde$; que pareillement celles-ci ont une adhérence avec les suivantes qui forment la circonférence $mnop$; ainsi de suite : il est clair que de proche en proche le frottement contre le bord de l'orifice $ABDE$, doit se faire sentir à toutes les particules qui sortent en même temps, et diminuer conséquemment le produit ou la quantité d'eau écoulée. Construisant donc sur AC, comme axe, une courbe $NgqK$, dont les ordonnées AN, ag, mq, CK représentent les vitesses correspondantes aux points A, a, m, C; l'aire de cette courbe sera proportionnelle à la somme des vitesses ou à la quantité d'eau écoulée. De sorte que si l'on nomme r le rayon CA; x, l'abscisse Cm; X, la hauteur dûe à la vitesse en m; π le rapport de la circonférence au diamètre; t, le temps de l'écoulement; θ, le temps de la chute par a; Q, la quontité d'eau écoulée, on aura (224),

$Q = \frac{4t\sqrt{\alpha}}{\theta} \int m x \, d x \sqrt{X}$, intégrale qui doit s'évanouir, lorsque $x=0$, et recevoir sa valeur complète, lorsque $x=r$.

On voit par-là que connoissant la loi suivant laquelle les particules tiennent les unes aux autres, on connoîtra la fonction X, et que par conséquent on pourra déterminer Q, soit algébriquement, soit par les quadratures des courbes.

315. *Corollaire.* Supposons, par exemple, que $NgqK$ soit une ligne droite, ce qui ne doit pas s'éloigner beaucoup de la vérité, l'orifice étant regardé comme très-petit. Nommons H, la hauteur dûe à la vitesse centrale CK; h, la hauteur dûe à la vitesse latérale AN; et menons NR parallèle à AC. Les triangles semblables NRK, Nfq donneront $fq = \frac{Nf \times RK}{NR} = \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r}$;

et mq ou $\sqrt{X} = \sqrt{h} + \frac{(r-x)(\sqrt{H}-\sqrt{h})}{r}$
$= \frac{x\sqrt{h}+(r-x)\sqrt{H}}{r}$. Donc $\int x \, dx \sqrt{X}$
$= \int \left(\frac{x^2 \, dx \sqrt{h} + (r x \, dx - x^2 \, dx)\sqrt{H}}{r} \right)$
$= \frac{x^3(\sqrt{h}-\sqrt{H})}{3r} + \frac{x^2\sqrt{H}}{2}$. Ainsi, en faisant $x=r$, on aura, $Q = \frac{2tmr^2\sqrt{\alpha}.(\sqrt{H}+2\sqrt{h})}{3\theta}$.

Reste à déterminer H et h. Or, il y a, pour cela, deux moyens.

I. On sait que dans les jets d'eau qui s'élèvent verticalement,

verticalement, le haut de la colonne est une espèce de pyramide, dont le sommet est formé par les molécules centrales qui se succèdent. Si l'on prend pour H la hauteur du sommet de cette pyramide au-dessus de l'orifice, et qu'on détermine H et Q, par une expérience immédiate, on connoîtra h. Car la formule précédente donne,

$$h = \frac{(3\theta Q - 2tmr^2\sqrt{\alpha H})^2}{16 m^2 t^2 r^4 \alpha}.$$

II. Supposons que la hauteur de l'eau dans le réservoir étant toujours la même, on ait un second orifice circulaire et horizontal, et nommons les quantités analogues à H, r, Q, par les mêmes lettres accentuées. Les quantités m θ, α, t demeurent les mêmes. Il paroît que la hauteur h doit être aussi la même dans le second orifice que dans le premier; car sous même hauteur d'eau dans le réservoir, le frottement de chaque point fluide contre le bord de l'orifice doit être le même; et par conséquent il doit rester la même vîtesse à chaque particule, déduction faite de la perte occasionnée par le frottement. On aura donc, comme pour Q, cette seconde équation

$$Q' = \frac{2tmr'^2(\sqrt{\alpha H'} + 2\sqrt{\alpha h})}{3\theta}.$$

De plus, en considérant que la loi du frottement doit être la même dans les deux cas, et que par conséquent on peut regarder, par exemple, HA comme le rayon du second orifice, tandis que CA

est le rayon du premier, on aura, $\sqrt{H} - \sqrt{h} : \sqrt{H'} - \sqrt{h} :: r : r'$, ou

$$r(\sqrt{H'} - \sqrt{h}) = r'(\sqrt{H} - \sqrt{h}).$$

Maintenant, regardons H, H', h, comme les trois inconnues, et supposons que tout le reste soit donné, nous trouverons

$$H = \left[\frac{\theta\,[\,Q\,(3\,r - r')\,r'^2 - 2\,Q'\,r^3\,]}{2\,t\,m\sqrt{\alpha}\,.\,(r - r')\,r^2\,r'^2}\right]^2,$$

$$H' = \left[\frac{\theta\,[\,Q'\,r^2\,(r - 3\,r') + 2\,Q\,r^3\,]}{2\,t\,m\sqrt{\alpha}\,.\,(r - r')\,r^2\,r'^2}\right]^2,$$

$$h = \left[\frac{\theta\,(\,Q'\,r^3 - Q\,r'^3\,)}{2\,t\,m\sqrt{\alpha}\,.\,(r - r')\,r^2\,r'^2}\right]^2.$$

316. Problême II. *Résoudre le même problême, en supposant que l'orifice, toujours fort petit et horizontal, au lieu d'être circulaire, soit un rectangle* ABCD (Fig. 35)?

Ayant mené du centre O les droites OA, OB, OC, OD, et ayant abaissé OK perpendiculaire à AB, soient tirées les droites OP, Op infiniment voisines. Du point O, avec le rayon OP, soit décrit le petit arc PV. Qu'on décrive encore du même point, avec les deux rayons infiniment peu différens Om, On, les deux petits arcs mq, nr. Cela posé, soient $OK = b$; $KB = c$; $KP = x$; $Om = y$; la hauteur dûe à la vitesse en $O = H$; la hauteur dûe à la vitesse en $K = h$; et désignons par t, θ, α, les même choses que ci-dessus. Les triangles semblables OKP, PVp donneront, $PV = \frac{b\,dx}{\sqrt{(bb + xx)}}$, et les arcs semblables

PV, mq, donneront $mq = \frac{b y d x}{b b + x x}$. Donc le petit espace $m q r n = \frac{b y d y d x}{b b + x x}$. En admettant sur la loi du frottement la même hypothèse que dans l'article précédent, la quantité de liqueur qui sort par le petit orifice $m q r n$ sera exprimée par $\frac{2 t \sqrt{\alpha}}{\theta} \times \frac{b y d y d x}{b b + x x}$ $\times \left(\frac{[\sqrt{(b b + x x)} - y] \sqrt{H} + y \sqrt{h}}{\sqrt{(b b + x x)}} \right)$, dont l'intégrale est (en regardant y seule comme variable), $\frac{t \sqrt{\alpha} . b d x}{\theta (b b + x x)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{[3 y y \sqrt{(bb+xx)}] . \sqrt{H} - 2 y^3 (\sqrt{H} - \sqrt{h})}{3}$. Faisant $y = \sqrt{(b b + x x)}$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice $P O p = \frac{t \sqrt{\alpha} . b d x (\sqrt{H} + 2 \sqrt{h})}{3 \theta}$, dont l'intégrale est $\frac{t \sqrt{\alpha} . b x (\sqrt{H} + 2 \sqrt{h})}{3 \theta}$. Faisant $x = c$, la quantité de liqueur qui sort par l'orifice triangulaire $O K B = \frac{t \sqrt{\alpha} . b c (\sqrt{H} + 2 \sqrt{h})}{3 \theta}$. Donc, en nommant Q la quantité de liqueur qui sort par l'orifice entier $ABCD$, on aura

$$Q = \frac{8 t \sqrt{\alpha} . b c (\sqrt{H} + 2 \sqrt{h})}{3 \theta}.$$

Cette équation fournit les mêmes remarques que celle de l'article précédent.

317. *Scholie I.* Les deux problèmes précédens

suffisent pour faire connoître la manière d'estimer les effets du frottement dans les écoulemens, par toutes sortes d'orifices horizontaux. Mais, pour apprécier exactement cette théorie, il faut la soumettre à de nombreuses expériences, en faisant varier les hauteurs des réservoirs, les figures et les dimensions des orifices. Quand on aura ainsi déterminé les loix du frottement pour de petits orifices horizontaux, on pourra appliquer les mêmes principes à des orifices latéraux, petits, mais dont tous les points ne peuvent pas néanmoins être censés placés à la même distance de la surface du fluide. Car, en regardant, comme nous l'avons déjà fait Chapître III, un orifice latéral, comme partagé en une infinité de petits orifices par des plans horizontaux, on cherchera d'abord les écoulemens par ces orifices élémentaires; ensuite on trouvera, par la sommation, les écoulemens pour les orifices entiers.

318. *Scholie II.* Il est facile d'appliquer la même théorie au mouvement de l'eau dans un long tuyau. Car, soit par exemple *ABCD* (*Fig.* 36), un vase entretenu constamment plein à la hauteur *AB*, et auquel est implanté un tuyau horizontal *ECmn*, dont le diamètre est assez petit pour qu'on puisse regarder chaque section verticale du tuyau, comme ayant tous ses points à égales distances du plan horizontal qui rase la surface du fluide. Le filet central *ok* a une plus grande vîtesse que les autres; et en allant du centre à la circonférence, les vîtesses diminuent à cause du frottement contre les parois

du tuyau. Or il est évident que l'on peut considérer le bout $m n$ du tuyau comme un orifice simple, et que par conséquent on trouvera la quantité d'eau qui sort par cet orifice, au moyen de l'article 314, lorsque l'on connoîtra les hauteurs dûes aux vîtesses des points fluides k, m, et la loi suivant laquelle le frottement se fait sentir de la circonférence au centre, pour différentes hauteurs AB de réservoirs, et différentes longueurs $o k$ de tuyaux.

En admettant pour le frottement l'hypothèse de l'article 315, nous avons, ici comme là, deux moyens pour déterminer les hauteurs H et h dûes aux vîtesses des points fluides k, m : l'un consiste à mesurer la hauteur H par l'amplitude du jet $k s$, et par la quantité Q d'eau écoulée par $m n$ pendant un temps donné; d'où l'on conclura ensuite h; l'autre à déterminer H et h, pour deux tuyaux dont les diamètres sont différens, mais qui ont des longueurs égales, et qui sont placés sous les mêmes profondeurs $o D$. Bornons-nous à indiquer le premier moyen; car il est inutile de s'appesantir sur des détails qui n'ont aucune difficulté.

La nature de la courbe $k s$ est telle, qu'un corps décriroit, par la seule pesanteur, la verticale $k r$ dans un temps égal à celui pendant lequel il décriroit uniformément la droite $k h$, égale et parallèle à $r s$, avec une vîtesse égale à celle du point fluide k. Si donc l'on cherche, par la théorie du mouvement, les expressions de ces deux temps, et qu'on les égale entr'elles, on obtiendra l'équa-

tion $(rs)^2 = kr \times 4H$; H étant la hauteur dûe à la vitesse du point k. Cette équation, qui est celle d'une parabole, donne $H = \frac{(rs)^2}{4kr}$. Ainsi, connoissant rs et kr, on connoîtra H. Quand on aura donc aussi déterminé Q, on connoîtra h.

On trouvera dans le second volume de cet ouvrage, un très-grand nombre d'expériences sur le mouvement des eaux dans de longs tuyaux, rectilignes ou tortueux, horizontaux ou inclinés.

CHAPITRE XI.

Du mouvement des fluides élastiques, et en particulier du mouvement de l'air.

319. DE même qu'en traitant de l'équilibre des fluides élastiques, j'ai considéré spécialement celui de l'air; semblablement je vais ici considérer le mouvement de l'air, la théorie étant la même pour tous les fluides élastiques.

Quand on parle du mouvement de l'air, on peut avoir en vue, ou de connoître le transport, soit réel, soit virtuel, d'une certaine masse d'air, d'un endroit en un autre; ou, le mouvement qu'ont les unes par rapport aux autres les particules d'une certaine masse d'air, qui a été dérangée de la situation d'équilibre. La première question va faire le sujet de

ce Chapitre : la seconde sera traitée dans le Chapitre suivant. Je négligerai par-tout l'effet du frottement.

320. Soit $ABCD$ (*Fig.* 37) un cylindre fermé de tous côtés, contenant un air homogène et également dense dans toute son étendue. Cet air est dans un état de compression, et aussi-tôt qu'on lui donne quelqu'issue, ou qu'on lui facilite le moyen de s'étendre ou de se dilater, il se dilate en effet, et sa force élastique diminue. Dans chaque état de compression, la force élastique est toujours égale à la force qui a produit cette compression. Ainsi, par exemple, si l'air $ABCD$ est pareil à celui que nous respirons, et que par conséquent il ait été comprimé, ou par la pression même de l'atmosphère, ou par une force équivalente, il pourra faire équilibre par son ressort, dans l'état moyen, ou au poids d'une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur, laquelle hauteur est indiquée par le baromètre ; ou au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur, l'eau étant environ quatorze fois moins dense que le mercure ; ou, au poids d'une colonne d'air de 850×32 pieds, ou 27200 pieds de hauteur, l'air naturel étant environ 850 fois moins dense que l'eau. Si donc on nomme en général F, la force élastique de l'air ; aa, la surface de la base qui en supporte l'action ; H, la hauteur de la colonne de mercure, ou d'eau, ou d'air, qui est équivalente à la force F ; on aura $F = aaH$. Pour l'air naturel, il faudra faire

$H = 28$ pouces, ou $H = 32$ pieds, ou $H = 27200$ pieds, selon que l'on voudra évaluer la pression ou le ressort de cet air, par le poids d'une colonne de mercure, ou d'eau, ou d'air.

321. L'expérience fait voir (67 et 68) que si une même masse d'air qui conserve toujours le même degré de température, est réduite à occuper successivement différens volumes, les forces qui la compriment, et par conséquent aussi ses différentes forces élastiques, suivent la raison inverse des volumes ou la raison directe des densités. Or réduire une masse d'air à occuper différens volumes, c'est la même chose que faire entrer dans un même volume différentes quantités d'air, dont les densités soient les mêmes respectivement que celles de la masse proposée dans ses différens états. Concluons donc de cette expérience que si différentes masses d'air occupent successivement un même volume, elles ont des forces élastiques qui leur sont proportionnelles; ou, ce qui revient au même, qui sont proportionnelles à leurs densités, puisque la densité n'est autre chose que la quantité de matière comprise sous un même volume donné.

322. Problème I. *Déterminer la vitesse avec laquelle l'air sort à chaque instant du vase* ABCD (Fig. 37), *par le petit orifice* C, *en supposant qu'il s'échappe dans le vide, ou qu'il n'éprouve aucune résistance à sa sortie?*

Soient, pour le premier instant du mouvement,

P le poids auquel la force élastique de l'air peut faire équilibre; Q, la densité de ce fluide; V, sa vîtesse; et nommons q, la densité qu'il a au bout d'un certain temps t; u, sa vîtesse à la fin de ce même temps. De plus, nommons M et m les masses d'air qui sortent en temps égaux dans les deux cas. On voit, par l'article précédent, que la force élastique de l'air après le temps t, sera $\frac{Pq}{Q}$: et comme les forces motrices sont proportionnelles aux quantités de mouvement qu'elles produisent dans le même temps, on aura, $P : \frac{Pq}{Q} :: MV : mu$. Mais les masses M et m, sont comme les produits de leurs volumes par leurs densités, et leurs volumes sont comme les produits de l'orifice par les vitesses. Ainsi l'orifice étant le même dans les deux cas, on aura, $M : m :: QV : qu$. Donc, $P : \frac{Pq}{Q} :: QVV : quu$. D'où l'on tire $u = V$. Ainsi l'air sort continuellement avec la même vîtesse, qui est la vitesse initiale V.

323. *Corollaire.* Supposons qu'au premier instant l'air contenu dans le vase soit de l'air naturel. Alors le poids P est égal au poids d'une colonne d'air naturel qui auroit l'orifice C pour base, et 27200 pieds de hauteur (320). La colonne qui presse sur l'orifice, et la masse qui en sort à chaque instant, ayant ainsi la même densité, la vîtesse en C est

dûe à la hauteur 27200 pieds. Or un corps grave, qui tombe de 15 pieds de hauteur, acquiert une vitesse capable de lui faire parcourir uniformément 30 pieds en une seconde. Par conséquent, on aura la vitesse V, pour une seconde, en faisant cette proportion, $\sqrt{15} : \sqrt{27200} :: 30$ pieds : $V = 1277$ pieds. L'air doit donc parcourir, en vertu de son ressort dans l'état ordinaire de l'atmosphère, environ 1277 pieds en une seconde, dans le vide.

324. Problême II. *Déterminer en général, dans l'hypothèse du problême précédent, le temps* t *que l'air emploie à passer de la densité* Q *à la densité* q?

Soient H la hauteur dûe à la vîtesse constante V de l'air au passage C; θ, le temps de la chute par α; C, l'aire de l'orifice; A, le volume du cylindre $ABCD$. Il sortira, pendant l'instant dt, un petit volume d'air exprimé par $\frac{2\,C\,dt\sqrt{\alpha H}}{\theta}$ (224). Or la masse étant comme le produit du volume par la densité, la petite masse d'air, comprise sous ce volume, sera $\frac{2\,C\,q\,dt\sqrt{\alpha H}}{\theta}$. Mais d'un autre côté, il est évident que durant le temps t, il est sorti du cylindre une masse exprimee par $A.Q - A.q$. On aura donc, $\frac{2\,C\,q\,dt\sqrt{\alpha H}}{\theta} = d(A.Q - A.q) = -A\,dq$; ce qui donne $dt = \frac{\theta A}{2\,C\sqrt{\alpha H}} \times$

$-\frac{dq}{q}$, dont l'intégrale est (en faisant $t=0$, lorsque $q=Q$), $t=\frac{A}{2C\sqrt{aH}}\times L.\left(\frac{Q}{q}\right)$.

On voit, par cette expression du temps, que le vase ne se videroit entièrement qu'au bout d'un temps infini; mais il ne faut pas oublier ici que suivant la remarque de l'article 73, l'hypothèse sur laquelle cette formule est fondée, cesse d'être exacte, lorsque la densité q devient très-petite.

325. Problème III. *L'air ayant été condensé dans le vase* ABCD : *on demande la vîtesse avec laquelle il sortira par le petit orifice* C, *en supposant qu'il se répande dans un air environnant plus rare que lui, et d'une étendue infinie, telle qu'on peut toujours l'attribuer à l'atmosphère par rapport au vase* ABCD?

Nommons D la densité de l'air extérieur; F, sa force élastique ; Q, la densité initiale de l'air intérieur, ou de l'air contenu dans le vase, et par conséquent $\frac{QF}{D}$ sa force élastique initiale; q, la densité de l'air intérieur, après un certain temps t, et par conséquent $\frac{qF}{D}$ sa force élastique correspondante; M, la petite masse initiale d'air qui sort par l'orifice; V, sa vîtesse; m, la petite masse d'air, qui sort, après le temps t; u, sa vîtesse. L'air extérieur opposant constamment la résistance F à la sortie de l'air intérieur, il est évident que la force

expulsive initiale de l'air intérieur est $\frac{QF}{D} - F$, ou $\frac{(Q-D)F}{D}$, et que la force expulsive, après le temps t, est $\frac{(q-D)F}{D}$. Or, les forces expulsives sont comme les quantités de mouvement qu'elles produisent dans le même temps; ainsi on a, $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: MV : mu$. Mais les masses M et m sont comme les produits de leurs densités par leurs volumes, et ces volumes sont comme les produits de l'orifice par les vitesses; donc, $\frac{(Q-D)F}{D} : \frac{(q-D)F}{D} :: QV^2 : qu^2$; ce qui donne $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}}$.

On voit qu'on aura $u = 0$, ou que l'air cessera de couler, lorsqu'on aura $q = D$. Je n'ai pas besoin de faire observer que si on avoit $D = Q$, il n'y auroit point du tout de mouvement, puisqu'alors la force expulsive initiale $\frac{(Q-D)F}{D}$ étant nulle, la vitesse initiale V seroit aussi nulle.

326. *Corollaire.* Supposons, par exemple, $Q = 10D$, $q = 9D$; et que la pression de l'atmosphère, ou la force élastique F, soit équivalente au poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. La force expulsive initiale $\frac{(Q-D)F}{D}$ de l'air, équivaudra au poids d'une colonne d'eau de 9×32 pieds,

ou de 288 pieds de hauteur : et comme l'air que cette force fait sortir par l'orifice est 85 fois moins dense que l'eau, il s'ensuit que l'écoulement initial est le même que si l'air étoit alors chassé par la pression d'une colonne d'air, par-tout de même densité que lui, et de 85 fois 288 pieds, ou de 24480 pieds de hauteur ; et que par conséquent la vîtesse V est dûe à cette hauteur. Donc la vitesse V, pour une seconde, sera de 30 pieds $\times \frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}}$; et la vîtesse u, aussi pour une seconde, sera de 30 pieds $\times \frac{\sqrt{24480}}{\sqrt{15}} \times \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}}$. Ainsi, on aura à peu-près, $V = 1212$ pieds, $u = 1204$ pieds.

On peut se faire par-là une idée de la vîtesse avec laquelle l'air condensé frappe ou pousse une balle dans ces fusils qu'on appelle *arquebuses à vent*, et dont la description se trouve dans tous les Livres de Physique.

327. Problème IV. *Trouver le temps* t *que l'air emploie à passer de la densité* Q *à la densité* q, *dans l'hypothèse du problème précédent ?*

En représentant par H la hauteur dûe à la vîtesse initiale V, et en se rappelant que les hauteurs dûes aux vîtesses V et u, sont comme les carrés de ces vitesses : on verra que la hauteur dûe à la vîtesse u, est $H \times \frac{Q(q-D)}{q(Q-D)}$. Ainsi la petite masse d'air, qui sort pendant l'instant dt, est

$\frac{2 C q d t}{\theta} \sqrt{\frac{\alpha H Q (q - D)}{q (Q - D)}}$. Mais cette masse a pour autre expression $d(A . Q - A . q)$, ou $- A dq$. Par conséquent on a, $dt = \frac{\theta A \sqrt{(Q - D)}}{2 C \sqrt{\alpha H Q}} \times \frac{- dq}{\sqrt{(qq - Dq)}}$, dont l'intégrale est (en faisant toujours $t = 0$, lorsque $q = Q$), $t = \frac{\theta A \sqrt{(Q - D)}}{2 C \sqrt{\alpha H Q}} \times L . \left[\frac{Q - \frac{1}{2} D + \sqrt{(Q^2 - D . Q)}}{q - \frac{1}{2} D + \sqrt{(q^2 - D . q)}} \right]$.

Nous avons vu que l'air cesse de couler, lorsque $q = D$. Faisant donc $q = D$, dans l'expression précédente, on aura celle du temps que dure l'écoulement.

328. Problême V. *Le vase* ABCD *étant supposé contenir un air plus rare que celui de l'atmosphère: on demande la vîtesse avec laquelle ce dernier entrera dans le vase, par le petit orifice* C?

En nommant D, la densité constante de l'air extérieur; F, sa force élastique; Q, la densité initiale de l'air contenu dans le cylindre, et par conséquent $\frac{Q F}{D}$ sa force élastique initiale; q, la densité de cet air, après le temps t, et par conséquent $\frac{q F}{D}$ sa force élastique après ce même temps; V, la vîtesse initiale avec laquelle l'air extérieur entre dans le cylindre; u, sa vîtesse après le temps t: on voit que la force impulsive initiale

de l'air dans le cylindre est $F - \frac{QF}{D}$, ou $\frac{(D-Q)F}{D}$, et qu'après le temps t la force impulsive est $\frac{(D-q)F}{D}$. On aura donc, $\frac{(D-Q)F}{D}$: $\frac{(D-q)F}{D}$ :: $DV^2 : Du^2$; et par conséquent $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D-Q}}$.

Si au premier instant, le cylindre étoit vide, on auroit $Q = 0$; et alors $u = V \times \sqrt{\frac{D-q}{D}}$.

On voit, dans l'un et l'autre cas, que l'air cesse d'entrer dans le cylindre, lorsque $q = D$, ou lorsque la densité de l'air est la même en-dedans qu'en-dehors.

329. Problême VI. *Trouver l'équation entre le temps* t *et la densité* q, *dans l'hypothèse du problême précédent ?*

Soit H la hauteur dûe à la vîtesse V; et gardons les autres dénominations. La petite masse d'air qui entre dans le cylindre $ABCD$, pendant l'instant dt, est exprimée par $\frac{2C.Ddt}{\theta}\sqrt{\frac{\alpha.H(D-q)}{D-Q}}$; et comme elle a pour seconde valeur, $d(A.q)$, ou $A\,dq$, on aura $dt = \frac{\theta A\sqrt{(D-Q)}}{2C.D\sqrt{\alpha H}}$ $\times \frac{dq}{\sqrt{(D-q)}}$, dont l'intégrale est $t = \frac{\theta A\sqrt{(D-Q)}}{2C.D\sqrt{\alpha H}}$ $\times [\sqrt{(D-Q)} - \sqrt{(D-q)}]$.

330. Problème VII. *Les deux cylindres* ABCD, FCHG (Fig. 38), *fermés de tous côtés, et contenant des airs différemment condensés : on demande la vîtesse avec laquelle l'air passera d'un cylindre dans l'autre, par le petit orifice* C?

Il est d'abord évident que l'air le plus dense coulera dans le plus rare. Supposons que cet écoulement se fasse du vase $ABCD$ dans le vase $FCHG$. Nommons D, la densité de l'air de l'atmosphère; F, sa force élastique; Q, la densité initiale de l'air $ABCD$, et par conséquent $\frac{QF}{D}$ sa force élastique initiale; q, sa densité après le temps t, et par conséquent $\frac{qF}{D}$ sa force élastique après ce même temps; R, la densité initiale de l'air $FCHG$, et par conséquent $\frac{RF}{D}$ sa force élastique initiale; r, sa densité après le temps t, et par conséquent $\frac{rF}{D}$, sa force élastique après ce même temps; V, la vîtesse initiale de l'air $ABCD$; u, sa vîtesse après le temps t. Il est clair que la force expulsive de l'air $ABCD$ est $\frac{QF}{D} - \frac{RF}{D}$, au premier instant; et $\frac{qF}{D} - \frac{rF}{D}$, après le temps t. Ainsi on aura, $\frac{QF-RF}{D} : \frac{qF-rF}{D} :: QVV : quu$; ce qui donne $u = V \times \sqrt{\frac{Q(q-r)}{q(Q-R)}}$.

L'écoulement

L'écoulement cessera, quand on aura $r = q$.

Comme la masse totale d'air contenue dans les deux cylindres demeure constamment la même; si l'on nomme A, la capacité ou le volume du cylindre $ABCD$; B, celui du cylindre $FCHG$, on aura cette seconde équation; $A \cdot Q + B \cdot R = A \cdot q + B \cdot r$, parce que les masses sont comme les produits des volumes par les densités. Cette équation donne, $r = \frac{A(Q-q) + B \cdot R}{B}$. Substituant cette valeur de r dans la valeur de u, on aura

$$u = V \times \sqrt{\frac{Q[B(q-R) - A(Q-q)]}{Bq(Q-R)}};$$

équation qui donne la vîtesse u, correspondante à chaque densité q.

331. Problème VIII. *Trouver l'équation entre le temps* t *et la densité* q, *dans l'hypothèse du problême précédent?*

Supposons, pour abréger un peu le calcul, $A \cdot Q + B \cdot R = f$; $A \cdot Q + B \cdot Q = K$; $B \cdot Q - B \cdot R = m$: on trouvera, en raisonnant toujours de même, $\frac{2Cq\,dt}{\theta} \sqrt{\frac{aH(Kq - fQ)}{mq}} = -A\,dq$; ou bien $dt = \frac{\theta A \sqrt{m}}{2C\sqrt{aHK}} \times \frac{-dq}{\sqrt{(q^2 - \frac{fQ}{K} \cdot q)}}$, dont l'intégrale est

$$t = \frac{\theta A \sqrt{m}}{2C\sqrt{aHK}} \times L. \left[\frac{Q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{\left(Q^2 - \frac{fQ^2}{K}\right)}}{q - \frac{fQ}{2K} + \sqrt{\left(q^2 - \frac{fqQ}{K}\right)}} \right].$$

332. *Scholie.* Dans les problêmes précédens, j'ai supposé que l'air conservoit toujours la même température, ou que la force élastique de ce fluide ne dépendoit uniquement que de sa densité. Mais il faut considérer qu'une chaleur plus ou moins grande, a une influence considérable sur la force élastique de l'air. Lorsqu'une masse déterminée de ce fluide vient à acquérir, d'une manière quelconque, une augmentation de chaleur : ou, elle s'étend en un plus grand volume et repousse l'air environnant et moins chaud, si elle en a la liberté : ou, si elle est contenue de tous côtés dans un certain espace sans pouvoir s'étendre, elle acquiert une plus grande force élastique, et exerce par conséquent un plus grand effort contre les parois du vase, ou contre les obstacles qui s'opposent à son expansion. Cette augmentation de force élastique est d'ailleurs de la même nature que celle qui naîtroit d'une plus grande densité de l'air, sous même température. Les effets résultans dans les deux cas peuvent donc être assimilés. De même, on peut toujours comparer l'action d'un fluide élastique quelconque, quelle que soit la cause de son élasticité, à la force élastique d'un air condensé. Ainsi, par exemple, une balle chassée par la force élastique de l'air condensé dans une *arquebuse à vent*, et un boulet

de canon chassé par l'action du fluide élastique qui provient de l'inflammation de la poudre, sont mis en mouvement par des causes semblables, car l'intensité de la seconde cause, qui est beaucoup plus grande que celle de la première, ne détruit pas cette parité. D'après cette remarque générale, nous ajoutons ici quelques problêmes, qui ont de fréquentes applications dans la Mécanique et dans la Physique.

333. Problème IX. *Un boulet* K (Fig. 39), *contenu dans un canon ou cylindre horizontal* ABCD, *dont il remplit exactement la cavité sans frottement, étant chassé de* A *vers* B *par l'action d'un air condensé, ou par celle du fluide élastique qui se développe lors de l'inflammation de la poudre : on demande la vitesse du boulet en un endroit quelconque* PM *du canon ?*

Soit, au premier instant, $AEFD$ l'espace occupé par l'air condensé; nommons Q la densité de cet air; D, celle de l'air de l'atmosphère, et F sa force élastique. La force élastique de l'air $AEFD$ sera $\frac{QF}{D}$. Supposons l'aire du cercle représenté par EF ou $PM = aa$; $AE = b$; $AP = x$; la masse du boulet $= K$; sa vitesse en $P = u$. Quand le boulet est parvenu de E en P, et que par conséquent l'air $AEFD$ s'est répandu dans l'espace $APMD$, la force élastique de cet air ainsi dilaté est $\frac{QF}{D} \times \frac{aab}{aax}$, c'est-à-

dire, $\frac{bQF}{xD}$. Cette force peut être regardée comme la pression d'une colonne de mercure sur la surface ou section PM; elle est détruite en partie par la pression contraire F de l'atmosphère sur la même surface; de sorte que la force absolue qui pousse le boulet de A vers B, est simplement $\frac{bQF}{xD} - F$. Par conséquent nous aurons, par le principe ordinaire des forces accélératrices, $Kudu = \left(\frac{bQF}{xD} - F\right) dx$; d'où l'on tire (en complétant l'intégrale de manière que l'on ait $u = 0$, lorsque $x = b$), $uu = 2F \times \left[\frac{bQ}{D.K} L.\left(\frac{x}{b}\right) + \frac{b-x}{K}\right]$. Faisant $x = AB = E$, il viendra, $2F.\left[\frac{bQ}{D.K} L\left(\frac{E}{b}\right) + \frac{b-E}{K}\right]$ pour l'expression du carré de la vitesse, V du boulet à la sortie du canon.

334. *Corollaire I.* On voit par cette formule, que si l'on connoissoit *à priori*, ou d'une manière quelconque, la quantité $\frac{Q}{D}$, c'est-à-dire, le rapport de la densité de l'air primitivement condensé $AEFD$ à la densité de l'air naturel, ou, ce qui revient au même, le rapport de la force élastique initiale du fluide qui pousse le boulet à la force élastique de l'air naturel, on connoitroit V. Réciproquement, par la connoissance de V, on peut trou-

ver $\frac{Q}{D}$. Or, pour déterminer V, par la voie de l'expérience, au lieu de poser le canon horizontalement, on le posera dans une situation un peu inclinée (ce qui ne peut produire qu'un léger changement dans la formule); et on mesurera sur le terrein l'amplitude du jet; d'où, en tenant compte de la résistance de l'air, on déduira la vitesse V, ou la hauteur dûe à cette vitesse.

335. *Corollaire II.* Parmi toutes les longueurs E qu'on peut donner au canon, il y en a une qui rendra la vitesse V un *maximum*. On la trouvera en égalant à zéro la différentielle de V^2, prise en ne faisant varier que E. Par ce calcul, on obtient, $E = b \times \frac{Q}{D^2}$.

Cette longueur est beaucoup plus grande que l'expérience ne la donne. Mais il faut observer que nos calculs sont fondés sur l'hypothèse, que la force élastique du fluide qui pousse le boulet le long du canon, suit exactement la raison inverse du volume que le fluide occupe successivement; ce qui n'est vrai à l'égard de l'air, que pour des condensations moyennes; et ce qui peut s'écarter encore plus de la vérité, pour le fluide élastique résultant de l'inflammation de la poudre; car ce dernier fluide n'est pas homogène, il ne s'enflamme pas tout d'un coup, et il s'échappe, en partie sensible, par les vides compris entre le boulet et les parois du canon. D'ailleurs, à mesure que la longueur du canon est plus grande, le boulet

y éprouve plus long-temps la résistance du frottement. Toutes ces considérations restreignent la longueur des pièces d'artillerie. Mais ordinairement on pousse trop loin cette diminution. L'expérience apprend que les longues pièces, dont on fait usage dans les siéges, lancent le boulet avec beaucoup plus de vîtesse que les pièces courtes dont on est quelquefois forcé de se servir dans la guerre de campagne, pour la facilité du transport et de la manœuvre. *Voyez* sur ce sujet l'*Artillerie* de Robins, avec les notes d'Euler.

336. Problême X. *Soit un cylindre vertical* LBCR (Fig. 40), *fermé de tous cotés, vide dans sa partie supérieure* LADR, *et contenant dans sa partie inférieure une certaine quantité d'air, maintenue en cet état par un poids* K, *posé sur le couvercle* AD, *qui est mobile, sans frottement et sans laisser de vide vers ses bords, lequel poids est par conséquent égal à la force élastique de cet air : on suppose que par un moyen quelconque, on applique encore sur le couvercle ou sur la tête du poids* K *un autre poids* G, *et on demande la vîtesse descensionnelle de la masse* K+G?

Supposons que le couvercle, au bout d'un temps t, soit parvenu dans la position parallèle quelconque PM : et soient $AB=a$; $AP=x$; la vîtesse de la masse $K+G$ en $P=u$; la gravité $=g$. La force élastique de l'air $ABCD$ étant $g.K$, celle de l'air $PBCM$ sera $gK\times\frac{a}{a-x}$ (68),

Par conséquent la force absolue qui fait descendre le couvercle ou la masse $K+G$, est $g(K+G) - gK \times \frac{a}{a-x}$, et on a l'équation $(G+K) \times u\,du = \left[g(K+G) - \frac{gKa}{a-x}\right] dx$; d'où l'on tire (en complétant l'intégrale de manière qu'on ait $u=0$, lorsque $x=0$),

$$u^2 = 2g\left[x + \frac{Ka}{K+G} \cdot L \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right)\right].$$

Quant à la valeur du temps dont l'équation différentielle est $dt = \frac{dx}{u}$, on la trouvera, en substituant dans cette équation pour u sa valeur, puis intégrant.

337. *Corollaire.* On voit par l'expression de u^2, que x augmentant depuis zéro, le premier terme de cette expression augmente, mais que le second diminue. La valeur de u deviendra donc encore zéro, lorsqu'on aura $x + \frac{Ka}{K+G} L \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right) = 0$, ou $x(K+G) = Ka \cdot L \cdot \left(\frac{a}{a-x}\right)$. D'où il suit qu'alors le couvercle parvenu, par exemple en ON, remontera à sa première position pour descendre de nouveau; ainsi de suite.

338. Problème XI. *Supposons maintenant que le cylindre vertical* LBCR (Fig. 41) *soit ouvert par en haut et communique par conséquent avec l'atmosphère; que la partie inférieure* ABCD

contienne de l'air naturel, dont la force élastique est égale à la pression de l'atmosphère sur le couvercle AD; *qu'on applique sur ce couvercle un poids* G *pour le faire descendre : on demande la vitesse de la masse* G, *quand le couvercle sera parvenu dans la position quelconque* PM?

Soient $AB = a$; $AP = x$; la vitesse descensionnelle de la masse $G = u$. Je représente par $g.K$ la pression de l'atmosphère sur le couvercle AD, ou la force élastique de l'air $ABCD$, g étant la gravité, K une masse convenable. Il est évident que lorsque le couvercle est en PM, la force élastique de l'air $PBCM$ est $gK \times \frac{a}{a-x}$. Ainsi la force absolue qui pousse alors le couvercle est $g\,.\,K + g\,.\,G - gK \times \frac{a}{a-x}$. Cette force communique le mouvement à la simple masse G; et on a par conséquent l'équation,

$$G\,\dot{u}\,d\dot{t} = \left[\,g\,(K + G) - \frac{Ka}{a-x}\,\right] d\dot{x}\,;$$

donc, $u^2 = 2g\left[\left(\frac{K+G}{G}\right)x + \frac{Ka}{G}L.\left(\frac{a-x}{a}\right)\right]$.

339. *Corollaire I.* De-là, en faisant un calcul pareil à celui de l'article 337, on trouvera que le couvercle AD doit descendre, puis remonter, ainsi de suite alternativement.

340. *Corollaire II.* Le ressort de l'air diminuant par le froid et augmentant par le chaud, on voit que si l'on peut, par un mécanisme quelconque,

refroidir l'air $ABCD$, puis l'échauffer, ainsi de suite alternativement : on voit, dis-je, que sans le secours du poids G, le couvercle AD descendra et montera alternativement. Il est donc possible de construire une machine dont le mouvement soit produit et entretenu par l'action d'un air, ou d'un fluide élastique, que l'on refroidit et que l'on échauffe alternativement. Tel est en effet le principe du mécanisme de la pompe à feu.

341. Problème XII. *Le cylindre vertical* LBCR (Fig. 42), *toujours ouvert par en-haut, et contenant de l'air naturel dans la partie inférieure* ABCD, *on suppose que le couvercle* AD *soit soulevé verticalement au moyen du poids* G *attaché à la corde non pesante* GVSF; *et on demande la vitesse de la masse* G, *quand le couvercle* AD *est parvenu dans la position quelconque* PM?

Soient $AB = a$; $AP = x$; la vîtesse descensionnelle de la masse $G = u$; et représentons, comme ci-dessus, la pression de l'atmosphère sur AD, ou la force élastique de l'air $ABCD$, par $g.K$. Lorsque l'air occupe l'espace $PBCM$, sa force élastique sera $gK \times \frac{a}{a+x}$. Ajoutant cette dernière force avec le poids $g.G$, et retranchant de la somme la pression $g.K$ de l'atmosphère sur le couvercle AD, on aura $g.G + \frac{g.Ka}{a+x} - g.K$ pour la force absolue qui fait descendre la masse G. Donc, $Gudu$

$= g\left(G - K + \frac{Ka}{a+x}\right) dx$; ce qui donne

$$u^2 = 2g\left[\frac{Ka}{G} \cdot L \cdot \left(\frac{a+x}{a}\right) - (K-G)x\right].$$

342. *Corollaire I.* En supposant $K > G$, on voit que x augmentant, le premier terme de la valeur de u^2 augmente, mais que le second diminue. Le couvercle, après être monté quelque part en ON, descendra en AD, pour remonter de nouveau; ainsi de suite.

343. *Corollaire II.* Si, au lieu d'employer le secours du poids G, pour faire d'abord monter le couvercle AD, on suppose que l'air $ABCD$ vienne à s'échauffer, puis à se refroidir; ainsi de suite alternativement : il est clair que le couvercle AD aura un mouvement alternatif d'ascension et de descension. Ce cas est l'inverse de l'article 340.

CHAPITRE XII.

Du mouvement vibratoire des parties de l'air.

344. LORSQU'ON passe de la considération du mouvement d'une masse d'air dont les tranches ou les parties regardées elles-mêmes comme de petites masses, sont supposées avoir la même vîtesse pour un même instant, à l'examen du mouvement que prennent les unes par rapport aux autres, les par-

ticules élémentaires d'une masse d'air, qui a été ébranlée en quelque endroit par une cause quelconque : le problême change totalement de nature; et on n'a pu parvenir encore à le résoudre complètement que dans un petit nombre de cas particuliers, non par le défaut des principes de Mécanique et d'Hydrodynamique, mais à cause de l'imperfection de l'analyse.

M. de la Grange est le premier qui ait entrepris avec succès cette profonde recherche (*Acad. de Turin, Tomes I et II*). Euler s'en est depuis fort occupé; et il y a fait en divers temps plusieurs découvertes importantes (*Acad. de Turin, Tome II; Acad. de Berlin*, 1759 *et* 1765; *Acad. de Pétersbourg*, 1771).

345. On sait que le son, ou le bruit en général, est l'effet d'une agitation imprimée à l'air qui vient en conséquence frapper le tympan de l'oreille. Une corde tendue que l'on pince ou que l'on met en vibration, ébranle l'air environnant, lui communique le mouvement dont elle est affectée, et produit, quand on veut, les sons musicaux. Il en est de même d'un tuyau de flûte ou d'orgue qu'on fait résonner. Rien n'est donc plus intéressant que de connoître les loix du trémoussement de l'air, puisque ces loix sont la base de l'Acoustique.

346. Le ressort de l'air est la principale cause qui entretient ou produit le mouvement vibratoire d'où résulte le son. Le poids de ce fluide n'y a

d'influence qu'autant qu'il en augmente ou diminue le ressort d'une manière marquée. En effet, on observe qu'au bord de la mer et sur les montagnes, le son excité par une même cause, a la même intensité et la même vitesse, malgré la différence du poids de l'air. Mais le chaud ou le froid, en dilatant ou en contractant l'air, font varier les sons en proportion, de la même manière qu'en tendant plus ou moins une corde vibrante, on lui fait rendre des sons plus ou moins aigus.

347. Les sons excités en plein air, et ceux qu'on tire d'un tuyau résonnant, étant de la même nature, le mouvement de vibration de l'air qui produit les uns et les autres, doit suivre les mêmes loix, du moins quant aux effets principaux. Je vais donc considérer simplement le mouvement de l'air dans un tuyau; ce qui simplifie le problême et facilite les moyens d'établir les élémens et les calculs qui doivent en fournir la solution. De plus, je supposerai que la chaleur est constante pour un même lieu, et que par conséquent la force élastique de l'air n'éprouve à cet égard aucune variation. Mais il ne faut pas oublier que d'un lieu à l'autre la différence de température de l'air peut produire quelque différence dans les tons, comme les Organistes l'observent.

348. Si nous voulions nous contenter d'envisager la question sous un point de vue un peu limité et un peu hypothétique, nous adopterions exclusive-

ment les moyens très-ingénieux que Daniel Bernoulli propose (*Acad. de Paris*, 1762) pour expliquer la formation des sons dans les tuyaux d'orgue. On verra en effet par l'idée générale que je vais donner de sa doctrine sur ce sujet, qu'elle rend des raisons physiques très-plausibles, du mécanisme par lequel le mouvement vibratoire de l'air est produit et propagé.

349. D. Bernoulli distingue trois sortes de tuyaux résonnans : les tuyaux fermés par un bout et ouverts par l'autre ; les tuyaux ouverts par les deux bouts ; et les tuyaux fermés par les deux bouts, en supposant que dans ce dernier cas on puisse, d'une manière quelconque, imprimer du mouvement à l'air, ce qui sert à expliquer la génération des tons harmoniques qu'on fait rendre à un tuyau simplement fermé par une extrémité, comme on le verra bientôt. Examinons successivement le mouvement de l'air dans ces trois espèces de tuyaux.

350. Soit donc, en premier lieu, un tuyau cylindrique AB (*Fig.* 43) fermé par le bout A, ouvert par le bout B. Qu'on le fasse résonner d'une manière quelconque, le son est produit par le mouvement de vibration des couches d'air aa qui s'approchent et s'éloignent alternativement du bout A. Ces couches prennent successivement les positions bb, cc, faisant les excursions bc. Toutes ces excursions peuvent être regardées comme très-petites : elles se font suivant les mêmes loix que les oscillations très-

petites d'un pendule simple. On voit que l'air est successivement condensé et raréfié. Sur quoi il faut observer que la condensation ou la raréfaction n'est pas la même sur toute la longueur du tuyau. Les plus grandes condensations sont vers *A*; les plus grandes raréfactions, vers *B*; et immédiatement au bout *B*, l'air du tuyau a la même densité que l'air extérieur. Mais ces inégalités dans les condensations ou dans les raréfactions, n'empêchent point que les excursions des couches ne soient isochrones entr'elles, de même que l'isochronisme des oscillations d'un pendule n'est point troublé par les inégalités des petits arcs qu'il peut décrire successivement.

351. En second lieu, soit un tuyau *AB* (*Fig.* 44), ouvert par les deux bouts. Imaginons, au milieu de ce tuyau, une séparation *CC*; alors on aura deux tuyaux *AC*, *BC*, fermés chacun par un bout et ouverts par l'autre. Mais, pour qu'on puisse regarder réellement la séparation fictive *CC* comme une cloison fixe, il faut que les couches d'air *aa* également éloignées de *CC* fassent de part et d'autre des vibrations *cab*, parfaitement égales et opposées. Ces couches exerceront ainsi des actions égales et contraires contre la cloison *CC* qui demeurera immobile; et l'on pourra considérer les deux tuyaux fictifs *AC*, *BC* comme le tuyau simple de l'article précédent. Suivant cette explication, un tuyau cylindrique ouvert par les deux bouts, doit donner le même ton qu'un pareil tuyau fermé par un bout, et dont la longueur ne seroit que la moitié de celle

du premier. Mais, comme dans les tuyaux ouverts le son est produit avec une entière facilité, et que les allées et venues des couches d'air sont parfaitement harmoniques, le son qu'ils rendent est plus éclatant et plus agréable que celui du tuyau bouché par un bout.

352. Enfin, soit *AB* (*Fig.* 45) un tuyau fermé par les deux bouts; et que l'air y ait été mis en vibration. On pourra regarder ce tuyau comme composé de deux parties *AC*, *BC*, lesquelles formeront chacune un tuyau fermé en *A* ou *B*, et ouvert en *C*. Les vibrations de l'air dans ces deux tuyaux partiels, pourront donc se faire comme celles du tuyau de la *Figure* 43, sans que les vibrations des deux côtés se nuisent réciproquement, pourvu que l'on suppose que toutes les couches d'air dans le tuyau entier *AB* vont toujours du même côté. Par-là, l'état de condensation dans la partie *AB*, répondra à l'état de raréfaction dans la partie *CB*; et réciproquement. La couche d'air en *C* conservera constamment sa densité naturelle; et en prenant de part et d'autre des couches *aa* également éloignées du point *C*, ces couches feront leurs vibrations *bac* toujours du même côté, avec une parfaite égalité dans leurs excursions et avec une parfaite correspondance. Si l'on fait une petite ouverture en *C*, on tirera facilement par cette ouverture un son du tuyau, et le ton sera le même que celui qui répond à la *Figure* 43, en supposant la longueur *AB* (*Fig.* 45) double de la longueur *AB* (*Fig.* 43.)

353. De-là, Dan. Bernoulli explique comment on peut d'un seul et même tuyau bouché par un bout et ouvert par l'autre, tirer plusieurs tons. Il partage le tuyau en parties égales, mais en nombre impair; et en commençant par le bout fermé, il prend ces parties deux à deux, de manière qu'il en reste une vers le bout ouvert; il considère chaque paire de parties, comme un tuyau fermé par les deux bouts. Tous ces tuyaux seront parfaitement consonnans, comme étant d'une longueur égale; et quant à la dernière partie qui n'a que la moitié de la longueur de chacun de ces tuyaux fictifs, elle sera aussi consonnante, suivant la remarque qui termine l'*article* 350.

354. Telles sont les hypothèses générales, d'après lesquelles Dan. Bernoulli déduit et soumet au calcul toute la théorie des sons musicaux dans les tuyaux d'orgue. Il considère d'abord des tuyaux cylindriques; ensuite il applique les mêmes principes aux tuyaux *à cheminée.* Par-tout une Géométrie délicate, et une suite d'expériences très-ingénieuses qui en confirment les résultats. La matière de ces recherches étant analogue à celle du problème *des cordes vibrantes,* l'Auteur emploie dans les deux cas des méthodes semblables. Mais en admirant les ressources de son génie, on est obligé de reconnoître qu'ici, comme dans le problême *des cordes vibrantes,* sa solution n'a pas toute la généralité que comporte la nature de la question. Le mouvement de l'air peut en effet être soumis aux loix

ordinaires

ordinaires de l'Hydrodynamique, comme je vais le montrer. J'emploirai, pour cela, la méthode d'Euler, qui me paroît d'une extrême simplicité.

355. Problème I. *L'équilibre de l'air dans le tuyau cylindrique* AB (Fig. 46) *horizontal et rectiligne, ayant été dérangé d'une manière quelconque : trouver en général une équation qui exprime le mouvement que ce fluide prendra en conséquence ?*

Il y a deux manières d'envisager ce problème : l'on peut demander le mouvement absolu de l'air pour un endroit quelconque, après un certain temps, sans relation au mouvement initial ; ou bien, l'on peut demander la relation du mouvement en un endroit quelconque, au bout d'un certain temps, au mouvement en un autre endroit regardé également comme variable de position, mais avec la condition que pour un temps déterminé on connoisse les circonstances du mouvement pour ce dernier endroit. Nous allons traiter la question sous le second point de vue, qui présente le plus de facilité et de simplicité pour le calcul.

Soient A un point fixe; S, un point quelconque où l'air a été agité au premier instant. Concevons qu'au bout d'un temps t, la portion ou couche d'air infiniment petite $SRR'S'$ ait été transportée en $srr's'$; de manière que le point S soit parvenu en s, et le point S' en s'. Il s'agit de comparer l'état de l'air en $srr's'$ à son état initial $SRR'S'$.

Supposons $AS = S$; $As = s$; la densité de l'air en $S = Q$; la pression qu'il éprouve en ce point $= P$; la densité de l'air en $s = q$; sa pression $= p$; la vîtesse en $S = V$; la vîtesse en $s = v$. En admettant ici l'hypothèse de l'article 69, c'est-à-dire que pour un degré constant de chaleur, comme nous le supposons, la force élastique de l'air, ou sa pression est proportionnelle à la densité : il s'ensuit que si l'on nomme D la densité de l'air naturel, Π sa force élastique ou sa pression, on aura $P = \frac{Q \cdot \Pi}{D}$; $p = \frac{q \cdot \Pi}{D}$, ou (en faisant $\frac{\Pi}{D} = k$), $P = kQ$, $p = kq$.

L'état initial de l'air $SRR'S'$ étant donné, les quantités Q et V peuvent toujours être exprimées par le moyen de la seule variable S, et de quantités constantes. Quant aux grandeurs s, q, v; comme elles dépendent non-seulement de S et V, mais encore du temps t, elles sont des fonctions de S et t; fonctions qui doivent être telles qu'en faisant $t = 0$, on ait $q = Q$, $p = P$, $v = V$.

Les points s et s' répondant au même temps t, on voit que la petite ligne ss' est la différentielle de s en ne faisant simplement varier que S. Ainsi, suivant l'usage ordinaire de noter les différences partielles, on aura $ss' = dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$. Soit aa la largeur constante ou section perpendiculaire du tuyau. Les petites masses d'air $SRR'S'$, $srr's'$, ont pour valeurs, $aaQdS$, $aaq \cdot dS\left(\frac{ds}{dS}\right)$:

la masse étant en général comme le produit du volume par la densité. Or, ces deux petites masses doivent être égales entr'elles; ainsi on aura, $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$, première équation entre Q, q, S, s.

L'espace élémentaire, parcouru par le point s, pendant l'instant dt, a pour expression $v\,dt$. Or, ce petit espace étant la variation de s, produite seulement par celle de t, est $dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$. On aura donc $v\,dt = dt\left(\frac{ds}{dt}\right)$, ou $v = \left(\frac{ds}{dt}\right)$. De même pendant l'instant dt, la vitesse v acquiert l'incrément $dt\left(\frac{dv}{dt}\right)$, ou $dt\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$. Donc le point s reçoit, dans le sens As, une force accélératrice $= \left(\frac{dds}{dt^2}\right)$: force qui est produite par l'excès de la pression en s, dans le sens As, sur la pression en s', dans le sens opposé. Ces deux pressions répondant au même temps t, et la première étant p, ou kq; la seconde sera kq plus la différentielle de cette quantité, prise en ne faisant varier que S, c'est-à-dire, $kq + k\,dS\left(\frac{dq}{dS}\right)$. Donc l'excès de la première sur la seconde sera $-k\,dS\left(\frac{dq}{dS}\right)$: pression élémentaire qui, étant appliquée à tous les points de la largeur sr, forme la force accélératrice absolue $-a^2\,k\,dS\left(\frac{dq}{dS}\right)$

qui pousse la petite masse d'air $s r r' s'$, dans le sens As. Divisant donc cette force par la masse mue, c'est-à-dire, par $a^2 q\, dS \left(\frac{ds}{dS}\right)$, ou par $a^2 Q\, dS$, on aura, $-\frac{k}{Q}\left(\frac{dq}{dS}\right)$ pour la force accélératrice simple qui pousse le point s dans le sens As, et qui doit être égale à $\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$. On aura donc cette seconde équation, $-\frac{k}{Q}\left(\frac{dq}{dS}\right)=\left(\frac{dds}{dt^2}\right)$, ou $k\left(\frac{dq}{dS}\right)+Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right)=0$, entre S, s, Q, q, t.

En combinant ensemble les deux équations fondamentales, $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$; $k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$: on pourra éliminer q et $\left(\frac{dq}{dS}\right)$. Car, d'abord, on aura $q=\frac{Q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}$; et d'une autre côté, puisque Q est une fonction de S et de constantes, si l'on différencie l'équation $Q=q\left(\frac{ds}{dS}\right)$ en ne faisant varier que s, on aura $dQ=dS\left(\frac{dq}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right)+q\,dS\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$; ce qui donne $\left(\frac{dq}{dS}\right)=\frac{dQ}{dS\left(\frac{ds}{dS}\right)}-\frac{q}{\left(\frac{ds}{dS}\right)}\left(\frac{dds}{dS^2}\right)$.

Substituant dans cette équation pour q sa valeur

trouvée ci-dessus ; substituant ensuite la valeur qui résultera de-là pour $\left(\frac{dq}{dS}\right)$, dans l'équation $k\left(\frac{dq}{dS}\right) + Q\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$; on trouvera, toutes réductions faites :

(A). $\frac{kdQ}{QdS}\left(\frac{ds}{dS}\right) - k\left(\frac{dds}{dS^2}\right) + \left(\frac{ds}{dS}\right)^2\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = 0$.

Équation qu'il faudroit intégrer, pour déterminer en général le mouvement de l'air dans notre tuyau ; mais c'est à quoi on n'a pas encore pu parvenir. Bornons-nous donc au problème suivant, qui suffit pour expliquer la formation et la propagation du son ; ce qui est le principal objet de cette recherche.

356. Problème II. *Déterminer le mouvement de l'air dans le tuyau proposé, dans l'hypothèse où le mouvement est très-petit ?*

Dans cette hypothèse, les lignes S, s diffèrent peu l'une de l'autre ; de sorte que si l'on suppose $s = S + z$, la quantité z sera très-petite. Or, cette supposition donne, $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$; $\left(\frac{dds}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dS^2}\right)$. Par conséquent, l'équation (A) deviendra $\frac{kdQ}{QdS}\left(1 + \frac{dz}{dS}\right) - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left[1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)\right]^2 \times \left(\frac{ddz}{dS^2}\right) = 0$; ou bien (à cause

que $\left(\frac{dz}{dS}\right)$ est négligeable en comparaison de 1),

(B). $\frac{k\,dQ}{Q\,dS} - k\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0.$

Pour parvenir à intégrer cette équation, je fais $z = x + r$, x étant une quantité variable indéterminée, r une fonction de S seulement; donc, $\left(\frac{dz}{dS}\right) = \left(\frac{dx}{dS}\right) + \left(\frac{dr}{dS}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dS^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddr}{dS^2}\right)$; $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)$; $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$. Ainsi l'équation (B) se changera en celle-ci, $\frac{k\,dQ}{Q\,dS} - k\left(\frac{ddr}{dS^2}\right) - k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$; d'où l'on peut tirer ces deux équations particulières, $\frac{dQ}{Q\,dS} - \left(\frac{ddr}{dS^2}\right) = 0$; $-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0.$ La première de ces équations donne, $\frac{dQ}{Q} = dS\left(\frac{ddr}{dS^2}\right)$, dont l'intégrale est $r = \int dS.L.\left(\frac{Q}{C}\right)$, C étant une constante; et en effet, si l'on différencie cette dernière équation, on aura $dr = dS.L.\left(\frac{Q}{C}\right)$; $\frac{dr}{dS} = L.\left(\frac{Q}{C}\right)$; $dS\left(\frac{ddr}{dS^2}\right) = \frac{dQ}{Q}$. Reste donc à intégrer la seconde équation, $-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$, qui est de la même espèce que celle du problème *des cordes vibrantes*, et qui s'intègre conséquemment par les

mêmes moyens. Entre ces moyens, en voici un fort analytique et fort direct, que l'on doit encore à Euler (*Calcul intégral, Tome III,* page 234).

Soient u et y deux nouvelles variables, telles que l'on ait $u = \alpha S + \beta t$, $y = \gamma S + \delta t$; α, β, γ, δ étant des coëfficiens constans indéterminés. On aura, $du = \alpha dS + \beta dt$; $\left(\frac{du}{dS}\right) = \alpha$; $\left(\frac{du}{dt}\right) = \beta$; $dy = \gamma dS + \delta dt$; $\left(\frac{dy}{dS}\right) = \gamma$; $\left(\frac{dy}{dt}\right) = \delta$. Supposons qu'on ait les équations $dx = m dS + n dt$, (m et n fonct. de S et t); $dx = m' du + n' dy$, (m' et n' fonct. de u et y); qui donnent $m = \left(\frac{dx}{dS}\right)$, $n = \left(\frac{dx}{dt}\right)$, $m' = \left(\frac{dx}{du}\right)$, $n' = \left(\frac{dx}{dy}\right)$. Mettons dans la seconde, pour du et dy leurs valeurs : nous aurons $dx = m' \alpha dS + m' \beta dt + n' \gamma dS + n' \delta dt$; donc, $\left(\frac{dx}{dS}\right)$ ou $m = m' \alpha + n' \gamma$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ou $n = m' \beta + n' \delta$. Ainsi, $dm = \alpha dm' + \gamma dn'$; $dn = \beta dm' + \delta dn'$. Or, puisque m' et n' sont des fonctions de u et y, on a, $dm' = \phi du + \phi' dy$, $dn' = \xi du + \xi' dy$; équations dans lesquelles, $\phi = \left(\frac{dm'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{du^2}\right)$, $\phi' = \left(\frac{dm'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dudy}\right)$, $\xi = \left(\frac{dn'}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{dydu}\right)$, $\xi' = \left(\frac{dn'}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{dy^2}\right)$. Mettons dans ces mêmes équations, pour du et dy

leurs valeurs; nous aurons, $dm' = \phi\alpha\, dS + \phi\beta\, dt + \phi'\gamma\, dS + \phi'\delta\, dt$; $dn' = \xi\alpha\, dS + \xi\beta\, dt + \xi'\gamma\, dS + \xi'\delta\, dt$. Donc $dm = \phi\alpha^2 dS + \phi\alpha\beta\, dt + \phi'\alpha\gamma\, dS + \phi'\alpha\delta\, dt + \xi\alpha\gamma\, dS + \xi\gamma\beta\, dt + \xi'\gamma^2\, dS + \xi'\gamma\delta\, dt$; $dn = \phi\alpha\beta\, dS + \phi\beta^2\, dt + \phi'\gamma\beta\, dS + \phi'\beta\delta\, dt + \xi\alpha\delta\, dS + \xi\beta\delta\, dt + \xi'\gamma\delta\, dS + \xi'\delta^2\, dt$. Donc $\left(\frac{dm}{dS}\right) = \phi\alpha^2 + \phi'\alpha\gamma + \xi\alpha\gamma + \xi'\gamma^2$; $\left(\frac{dn}{dt}\right) = \phi\beta^2 + \phi'\beta\delta + \xi\beta\delta + \xi'\delta^2$. Ces deux dernières équations sont les mêmes que les suivantes:

$$\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right),$$

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right).$$

Par conséquent, au lieu de l'équation proposée $-k\left(\frac{ddx}{dS^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$, nous aurons celle-ci:

$$\left.\begin{array}{l} -k\alpha^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) - 2k\alpha\gamma\left(\frac{ddx}{dudy}\right) - k\gamma^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right) \\ +\ \beta^2\left(\frac{ddx}{du^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddx}{dudy}\right) + \delta^2\left(\frac{ddx}{dy^2}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

Maintenant, supposons (à cause des quantités indéterminées, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$), $\beta^2 - k\alpha^2 = 0$, $\delta^2 - k\gamma^2 = 0$; et $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = \sqrt{k}$, $\delta = -\sqrt{k}$: les deux termes extrêmes de l'équation précédente disparoîtront, et nous aurons simplement, $-(2k + 2k)\left(\frac{ddx}{dudy}\right) = 0$, ou $\left(\frac{ddx}{dudy}\right) = 0$.

Pour intégrer cette équation, supposons $dx = M du + N dy$, en sorte que $M = \left(\frac{dx}{du}\right)$, $N = \left(\frac{dx}{dy}\right)$. On aura $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{ddx}{du dy}\right)$, $\left(\frac{dN}{du}\right) = \left(\frac{ddx}{dy du}\right)$. Or, chacune des quantités $\left(\frac{ddx}{du dy}\right)$, $\left(\frac{ddx}{dy du}\right)$, qui sont égales entr'elles, est zéro par hypothèse; donc la quantité M ne contient point de y, puisqu'en la différenciant suivant y, le coëfficient de dy, seroit zéro; et semblablement la quantité N ne renferme point de u. Ainsi, M est une fonction de u, et N une fonction de y. Donc (en désignant les fonctions par les lettres F et f, suivies de deux points), on aura $x = F : u + f : y$; ou bien (à cause de $u = \alpha S + \beta t = S + t\sqrt{k}$, $y = \gamma S + \delta t = S - t\sqrt{k}$),

$$x = F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

Substituons cette valeur de x dans l'équation $z = r + x$; mettons aussi pour r sa valeur $\int (dS \times L . \frac{Q}{C})$: nous aurons,

$$z = \int dS . L . \left(\frac{Q}{C}\right) + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

Donc, à cause de $s = S + z$, on aura,

$$s = S + \int dS . L . \left(\frac{Q}{C}\right) + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}).$$

De plus, puisqu'on a, $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + \left(\frac{dz}{dS}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, on aura,

$$\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1 + L.\left(\frac{Q}{C}\right) + F' : (S + t\sqrt{k}) + f' : (S - t\sqrt{k}),$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \sqrt{k}.F' : (S + t\sqrt{k}) - \sqrt{k} \times f' : (S - t\sqrt{k}).$$

La constante C peut être supposée égale à la densité D de l'air naturel. D'un autre côté, puisque l'agitation initiale de l'air a été très-petite, la densité Q diffère peu de la densité D; de sorte que si l'on fait $Q = D + \theta$, θ sera une quantité très-petite; et l'équation logarithmique $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D+\theta} = \frac{d\theta}{D} - \frac{\theta d\theta}{D^2} + \frac{\theta^2 d\theta}{D^3}$ — etc. pourra se réduire à $\frac{dQ}{Q} = \frac{d\theta}{D}$, en rejetant le quarré et les puissances plus hautes de θ. Donc $L.\left(\frac{Q}{D}\right) = \frac{Q-D}{D}$, en complétant l'intégrale, de manière que $Q = D$ donne $\theta = 0$. Ainsi, $\int dS . L.\left(\frac{Q}{C}\right) = \int \frac{QdS}{D} - S$. On pourra donc changer les expressions de s et de $\left(\frac{ds}{dS}\right)$ en celles-ci :

$$s = \int \frac{QdS}{D} + F : (S + t\sqrt{k}) + f : (S - t\sqrt{k}),$$

$\left(\frac{ds}{dS}\right) = \frac{Q}{D} + F' : (S + t\sqrt{k}) + f' : (S - t\sqrt{k})$.

Les valeurs de s, $\left(\frac{ds}{dS}\right)$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)$, s'appliqueront à l'état initial de l'air, en faisant dans ces valeurs, $t = 0$; $s = S$; $q = Q$, et par conséquent $\left(\frac{ds}{dS}\right) = 1$, à cause de l'équation $Q = q\left(\frac{ds}{dS}\right)$; $\left(\frac{ds}{dt}\right) = V$. Par-là, on aura,

$$S = \int \frac{Q\,dS}{D} + F : S + f : S;$$

$$1 = \frac{Q}{D} + F' : S + f' : S;$$

$$V = \sqrt{k} \,.\, F' : S - \sqrt{k} \,.\, f' : S.$$

Ces trois équations n'en forment réellement que deux, puisque la première, étant différenciée, donne la seconde. Des deux dernières combinées ensemble, on tire les deux fonctions différentielles, $F' : S = \frac{D - Q}{2D} + \frac{V}{2\sqrt{k}}$; $f' : S = \frac{D - Q}{2D} - \frac{V}{2\sqrt{k}}$; et par conséquent aussi les deux fonctions intégrales, $F : S = \int dS\left(\frac{D - Q}{2D}\right) + \int \frac{V\,dS}{2\sqrt{k}}$; $f' : S = \int dS\left(\frac{D - Q}{2D}\right) - \int \frac{V\,dS}{2\sqrt{k}}$. Connoissant ainsi les fonctions $F : S$, $f : S$, qui répondent à l'état initial de l'air, on connoîtra aussi les fonctions $F : (S + t\sqrt{k})$, $f : (S - t\sqrt{k})$, qui répondent à l'état de l'air à la fin du temps t, puisque les unes et les

autres se forment suivant la même loi. On pourra donc comparer ensemble les agitations de l'air dans ces deux états. De-là, nos Lecteurs, versés dans l'analyse, déduiront sans peine toute la théorie de la propagation du son dans des tuyaux cylindriques, soit que ces tuyaux aient une longueur finie et déterminée, soit qu'on les regarde comme indéfinis. Voyez de plus grands détails dans les Ouvrages que j'ai cités.

CHAPITRE XIII.

De la percussion ou résistance des Fluides.

357. LORSQU'UN fluide en mouvement rencontre un corps ou un obstacle placé sur sa route, il pousse nécessairement ce corps, cet obstacle, avec une certaine force, puisque les particules fluides sont elles-mêmes des petits corps, qui, multipliés par leur vitesse, composent une quantité déterminée de mouvement. Si au lieu de supposer le fluide en mouvement, on le suppose en repos, mais qu'un corps vienne le choquer avec une certaine vitesse, la *résistance* que le fluide opposera au corps proposé, sera égale à la *percussion* que le fluide mu avec la vitesse du corps exerceroit contre ce même corps supposé en repos. En effet, pour changer la *résistance* en *percussion*, on n'a qu'à supposer le

corps en repos, et attribuer sa vîtesse en sens contraire, au fluide. La *percussion* et la *résistance* des fluides suivent donc les mêmes loix, et se mesurent de la même manière.

358. On distingue en général deux sortes de forces, les forces *mortes* et les forces *vives*. Les premières sont de simples *pressions* qui ne produisent pas de vîtesse actuelle et finie, et qui n'en produiroient qu'après avoir agi pendant un temps fini : les autres, qu'on appelle ordinairement *forces de percussion*, produisent une vîtesse finie et actuelle, et peuvent être regardées comme des sommes de pressions accumulées. Il est évident que toute force de pression peut être contre-balancée ou mesurée par un poids; car un poids n'est autre chose qu'une masse soumise à l'action de la pesanteur qui est elle-même une force de pression. Quant aux forces de percussion, si l'on suppose qu'elles produisent leur effet dans un instant indivisible, elles seront infinies par rapport aux forces de pression, et ne pourront par conséquent être mesurées par aucun poids. Mais on ne conçoit pas comment la force d'un corps en mouvement, qui est une quantité finie, peut, dans un instant indivisible, produire un effet fini, c'est-à-dire, imprimer une quantité déterminée de mouvement à un autre corps. Toute communication de mouvement se fait dans un temps fini, quoiqu'il puisse être d'une brièveté qui nous échappe. Nous pouvons donc regarder en général les forces de percussion comme agissant par degrés, à la manière

des forces de pression, et comme produisant leur effet dans un temps fini extrêmement court, ou comme infiniment petit. Alors elles seront mesurables par des poids; car la pesanteur appliquée, pendant un temps fini, à un corps, produit une force vive, capable par conséquent de faire équilibre à une autre force vive On voit par-là que lorsqu'un fluide frappe un corps, le choc qu'il exerce ainsi est toujours réductible à un certain poids.

359. Il est très-difficile de déterminer les loix de la percussion des fluides, d'une manière exacte et applicable à la pratique. On n'a pas encore pu trouver à ce sujet une théorie parfaitement satisfaisante. Dans celle qu'on suit ordinairement, et qui a l'avantage d'être fort simple, on suppose que le fluide est composé à chaque instant, dans la direction de son mouvement, d'une infinité de filets parallèles qui donnent chacun leur coup, sans se gêner les uns les autres; ce qui ne peut pas avoir lieu en rigueur, et ce qui mène en certains cas à des résultats trop éloignés de la vérité pour être admissibles. Cependant deux motifs m'engagent à exposer ici cette théorie, malgré ses imperfections; l'un est de faciliter à mes lecteurs l'intelligence de plusieurs ouvrages sur l'Architecture navale, auxquels elle sert de fondement; l'autre est qu'elle peut être employée, sans craindre beaucoup d'erreur, comme je m'en suis assuré par l'expérience, dans le calcul des machines mues à l'aide de roues, par des courans d'eau; et en général dans tous les cas où l'angle d'obli-

quité du choc n'est pas trop petit, je veux dire lorsqu'il ne descend guère au-dessous de 60 degrés.

360. Théorème I. *Si un même fluide* MXZN (Fig. 47) *dont toutes les particules se meuvent avec la même vîtesse, frappe perpendiculairement les deux plans* AB, AR *en repos : les forces des chocs sont entre elles comme ces plans.*

Car toutes les molécules fluides étant supposées se mouvoir suivant les directions IK, OQ, etc., perpendiculaires aux deux plans proposés, l'impulsion contre le plan AB, est à l'impulsion contre le plan AR, comme le produit du nombre des molécules qui frappent AB, par leur vîtesse, est au produit du nombre des molécules qui frappent AR, par leur vîtesse. Or les masses qui frappent dans des temps égaux, les plans AB, AR, sont des prismes qui ont pour bases ces plans, et pour hauteur commune la vitesse du fluide. Donc le rapport de l'impulsion contre le plan AB, à l'impulsion contre le plan AR, est évidemment le même que le rapport du plan AB au plan AR.

361. Théorème II. *Si deux fluides de même espèce* MXZN, EGHF (Fig. 47 et 48), *mus avec différentes vîtesses, frappent perpendiculairement les deux plans* AB, CD, *en repos : les forces des chocs seront entr'elles comme les produits des plans par les quarrés des vîtesses des fluides.*

Nommons	l'impulsion contre AB	F,
	l'impulsion contre CD	f,
	la masse fluide qui choque AB	M,
	la vitesse de ce fluide	V,
	la masse fluide qui choque CD	m,
	la vitesse de ce fluide	u.

On aura, $F : f :: MV : mu$. Or, puisque les fluides sont de même espèce, les masses M et m sont entr'elles comme leurs volumes, et leurs volumes sont entr'eux comme les produits des plans AB, CD, qui leur servent de base, multipliés par les vitesses des fluides qui en représentent les hauteurs. Ainsi on aura, $M : m :: AB \times V : CD \times u$; et $MV : mu :: AB \times V^2 : CD \times u^2$. Donc aussi, $F : f :: AB \times V^2 : CD \times u^2$.

362. *Remarque*. Si les fluides n'étoient pas de la même espèce, la raison des densités devroit entrer dans la raison des masses qui frappent en même temps les plans AB, CD. Alors *les chocs seroient en raison composée des plans, des densités des fluides, et des quarrés des vîtesses des mêmes fluides*. Il ne faut pas perdre cette remarque de vue, lorsqu'il s'agit de comparer le choc d'un fluide à celui d'un autre fluide de densité différente. Par exemple, sous la même étendue de la surface choquée, et sous la même vîtesse des deux fluides, la percussion de leau est à celle de l'air, comme 850 est à 1, c'est-à-dire, dans le rapport des densités de ces deux fluides.

Dans la suite, je suppose toujours, pour abréger, que

que les fluides sont de la même espèce, ou qu'ils ont la même densité.

363. Théorème III. *Si les deux fluides* MXZN, EGHF, *allant toujours choquer perpendiculairement les deux plans* AB, CD, *avec les vîtesses* V *et* u, *ces plans ont, parallèlement à eux-mêmes, au moment du choc, les vîtesses* v *et* u' : *les forces des chocs seront entr'elles comme les produits des plans, par les quarrés des différences ou des sommes des vîtesses des fluides et des plans.*

Car soient IT la vîtesse du premier fluide, et KT la vîtesse du plan AB; LQ la vitesse du second fluide, et PQ la vitesse du plan CD : il est évident que les chocs sont les mêmes que si les plans étoient en repos, et si les fluides, au lieu de se mouvoir avec les vîtesses IT, LP, se mouvoient simplement avec les vîtesses IK, LP, puisque les plans se soustraient au choc avec les vîtesses KT, PQ. Donc (en nommant F et f les impulsions des deux fluides), on aura, $F:f :: AB \times (V-v)^2 : CD \times (u-u')^2$.

On voit de même que si les plans, au lieu de fuir directement les fluides, venoient à leur rencontre, avec les vîtesses v et u', on auroit $F:f :: AB \times (V+v)^2 : CD \times (u+u')^2$. Ainsi, en réunissant les deux cas, on aura, $F:f :: AB \times (V \mp v)^2 : CD \times (u \mp u')^2$.

364. *Corollaire.* Si l'un des plans, par exemple, AB, est en repos : alors $v = 0$, et on a, $F:f$

$:: AB \times V^2 : CD \times (u \mp u')^2$, proportion qui sert à comparer la percussion perpendiculaire d'un fluide contre un plan en repos, à la percussion perpendiculaire contre un plan mobile.

365. Théorème IV. *Si le fluide* MXZN (Fig. 47) *frappe perpendiculairement le plan* AB *en repos, et que le fluide* EGHF (Fig. 49) *frappe obliquement le plan* CD *aussi en repos : l'impulsion contre le plan* AB, *sera à l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre le plan* CD, *comme le produit du plan* AB, *par le quarré de la vitesse du fluide* MXZN, *et par le quarré du sinus total, est au produit du plan* CD *par le quarré de la vitesse du fluide* EGHF, *et par le quarré du sinus de l'angle* RCD *d'incidence du fluide* EGHF *sur le plan* CD.

Nommons	l'impulsion contre AB.............	F,
	l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre CD.................	f,
	la vitesse du fluide $MXZN$.........	V,
	la vitesse du fluide $EGHF$.........	u,
	la masse qui choque AB............	M,
	la masse qui choque CD...........	m,
	sa vitesse perpendiculaire à CD......	u',
	le sinus total.......................	R,
	le sinus de l'angle d'incidence RCD....	p.

On aura d'abord, $F : f :: MV : mu'$. Or, en menant la droite DR perpendiculaire à la direction du fluide, et terminée par CR qui est dans cette direction, il est évident que le nombre de

filets qui frappent DC est le même que le nombre de filets qui frappent DR. Ainsi les prismes fluides qui frappent en temps égaux les plans AB, CD, sont entr'eux comme leurs bases AB, DR, multipliées par les vitesses des fluides, qui en sont les hauteurs. On a donc, $M : m :: AB \times V : DR \times u$; ou bien (en observant que $DR = CD \times \frac{p}{R}$), $M : m :: AB \times V : CD \times \frac{p}{R} \times u :: AB \times V \times R : CD \times u \times p$. De plus, si sur la direction d'un filet quelconque xn du fluide $EGHF$, on prend la partie ny pour représenter la vitesse de ce fluide, et qu'on fasse le parallélogramme rectangle $ntyr$ dont le côté nt est perpendiculaire, et le côté nr parallèle à DC : on voit que des deux vitesses nt, nr dans lesquelles la vitesse ny se décompose, il n'y a que la première qui contribue au choc perpendiculaire contre DC, et qu'il ne faut pas avoir égard à la seconde. Comparant la vitesse nt ou u' à la vitesse u du fluide $EGHF$, on aura, $u' : u :: ry : ny :: p : R$, et par conséquent $u' = u \times \frac{p}{R}$. On aura donc, $MV : mu' :: AB \times V^2 \times R : \frac{CD \times u^2 \times p^2}{R} :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$. Donc enfin, $F : f :: AB \times V^2 \times R^2 : CD \times u^2 \times p^2$.

Cette proportion servira à comparer la percussion oblique à la percussion perpendiculaire, les

deux plans choqués étant en repos à l'instant des chocs.

366. *Corollaire I.* Lorsque les vîtesses V et u sont égales, on a simplement, $F:f::AB \times R^2 : CD \times p^2$, proportion qui servira à comparer l'impulsion perpendiculaire d'un fluide contre un plan, à l'impulsion du même fluide ou d'un fluide pareil, mu avec la même vîtesse, contre un autre plan frappé obliquement.

367. *Corollaire II.* De-là suit aussi la manière de comparer entr'elles les percussions perpendiculaires qui proviennent des percussions obliques, les plans choqués étant toujours en repos; car si, en gardant les autres dénominations de l'article 365, on appelle A la surface du plan AB, B celle du plan CD; qu'ensuite on suppose un troisième plan C qui soit choqué obliquement par un troisième fluide mu avec la vîtesse v, et qu'on appelle ϕ la force qui résulte perpendiculairement contre ce même plan, q le sinus de l'angle sous lequel il est frappé : on aura ces deux proportions,

$$F:f::A \times V^2 \times R^2 : B \times u^2 \times p^2;$$
$$\phi : F :: C \times v^2 \times q^2 : A \times V^2 \times R^2,$$

lesquelles étant multipliées par ordre, donnent $\phi : f :: C \times v^2 \times q^2 : B \times u^2 \times p^2$. D'où l'on voit que *les forces* ϕ *et* f, *qui résultent perpendiculairement contre les deux plans* C *et* B, *sont entr'elles en raison composée des plans, des quarrés des*

vîtesses des fluides, et des quarrés des sinus des angles d'incidence.

368. *Corollaire III.* Soient (*Fig.* 50 *et* 51) deux fluides $MXZN$, $EGHF$, qui vont choquer obliquement les deux plans AB, CD, qui se meuvent parallèlement à eux-mêmes, avec les vîtesses IO, LS. Représentons les vîtesses des deux fluides par les droites IT, LQ; ensuite décomposons la vîtesse IT en deux autres IO, IP, dont l'une IO est la même que celle du plan AB; et la vîtesse LQ en deux autres LS, LK, dont l'une LS est la même que celle du plan CD. Les deux vîtesses IP, LK, et les angles PIA, KLC, qu'elles forment avec les plans AB, CD, sont des quantités qu'on peut déterminer par les règles de la Trigonométrie, puisque, dans les deux parallélogrammes $IPTO$, $LKQS$, on connoît les diagonales IT, LQ, les côtés IO, LS, les angles OIT, SLQ; et de plus, les angles TIO, QLS. Or, il est clair que les fluides n'agissent sur les plans qu'en vertu des vîtesses IP, LK, puisque ces plans, par leurs vîtesses propres, se soustraient entièrement à l'effet des vitesses IO, LS. Ainsi les deux chocs seront absolument les mêmes que si, les plans étant supposés en repos, les fluides venoient les choquer avec les vîtesses IP, LK. Donc, si l'on nomme f et f' les forces qui résultent perpendiculairement aux plans AB, CD, en vertu de ces choc; p le sinus de l'angle PIA, q le sinus de l'angle KLC: on aura, par l'article

précédent, $f : f' :: AB \times (IP)^2 \times p^2 : CD \times (LK)^2 \times q^2$.

Cette proportion sert à comparer les chocs que deux fluides exercent perpendiculairement contre deux plans qui ont, par d'autres causes, des mouvemens donnés, parallèlement à eux-mêmes.

369. *Scholie général.* Ayant ainsi appris à comparer ensemble les différentes espèces de percussions des fluides, il ne s'agit plus que de connoître la mesure absolue de l'une d'entr'elles, pour en conclure celle de toutes les autres. Or, suivant l'expérience, *la percussion perpendiculaire et directe d'un fluide indéfini contre un plan en repos, est égale sensiblement au poids d'une colonne de ce fluide, laquelle auroit pour base la surface choquée, et pour hauteur la hauteur dûe à la vîtesse avec laquelle se fait la percussion;* de sorte que si l'on nomme P cette percussion, s^2 la surface du plan choqué, h la hauteur dûe à la vîtesse du fluide, ϖ la pesanteur spécifique de ce même fluide, on a, à peu de chose près, $P = \varpi s^2 h$. On sait déterminer h, par les loix de la chute des graves.

Par exemple, supposons que la surface s^2 soit un pied quarré, et que le fluide soit de l'eau douce, dont le pied cube pèse 70 livres, à peu de chose près; que dans le cas présent, cette eau aille choquer le plan, avec une vîtesse uniforme de 1 pied par seconde : on trouvera que la percussion P est équivalente à un poids d'environ 19 onces.

La percussion des fluides qui se meuvent dans

des canaux étroits, ou dans des coursiers, contre des plans qui occupent presqu'entièrement la largeur de ces coursiers, est plus considérable, comme on le verra dans la suite, par la voie de l'expérience.

Faisons quelques applications générales de la théorie précédente.

370. Problème I. *Le triangle isoscèle* ACB (Fig. 52) *en repos, étant exposé au choc d'un fluide dont la direction est perpendiculaire à sa base* AB : *on demande le rapport de l'impulsion que recevra ce triangle parallèlement à sa hauteur* CD, *à l'impulsion directe et perpendiculaire que recevroit sa base* AB?

En nommant F l'impulsion directe contre AD ou DB; f l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre AC ou CB; R le sinus total : on aura (366), $F : f :: AD \times R^2 : AC \times (\sin. ACD)^2 :: AD \times (AC)^2 : AC \times (AD)^2 :: AC : AD$. Donc, $f = \frac{F \times AD}{AC}$. Considérons maintenant que les impulsions sur AC et sur CB se détruisent en partie; car si l'on prend deux filets correspondans OR, or, et que représentant les impulsions perpendiculaires aux points R et r par les droites RF, rf égales et perpendiculaires aux côtés AC, CB du triangle, on fasse les parallélogrammes rectangles $ERHF$, $erhf$, dont les côtés RH, rh, soient parallèles à AB, et les côtés RE, re parallèles à CD; il est clair que des quatre

forces RH, RE, rh, re, dans lesquelles les forces RF, rf se décomposent, les deux RH, rh se détruiront mutuellement, et qu'il ne restera que les deux forces RE, re, pour pousser le triangle parallèlement à CD. De plus, si l'on nomme ϕ la force RE ou re, on aura, $f : \phi :: RF : RE :: AC : AD$; et par conséquent $\phi = \frac{f \times AD}{AC}$. Mettant pour f sa valeur $\frac{F \times AD}{AC}$, on aura, $\phi = \frac{F \times (AD)^2}{(AC)^2}$. Donc, $\phi : F :: (AD)^2 : (AC)^2$; et $2\phi : 2F :: (AD)^2 : (AC)^2$, proportion qui nous apprend que *l'impulsion reçue par le triangle parallèlement à sa hauteur, est à l'impulsion directe que recevroit sa base, comme le quarré de la demi-base, est au quarré de l'un des cotés.* Connoissant donc la seconde de ces forces, on connoîtra aussi la première.

371. *Corollaire I.* Donc, lorsque le triangle isocèle ADC est rectangle, l'impulsion qu'il reçoit parrallèlement à sa hauteur n'est que la moitié de l'impulsion directe que recevroit sa base. Car alors le triangle rectangle ADC est isocèle, et on a, $(AD)^2 : (AC)^2 :: 1 : 2$.

372. *Corollaire II.* Il suit encore de-là que si l'on a un quarré $ACBM$ (*Fig.* 53.) qui soit frappé d'abord dans la direction de sa diagonale CM, ensuite perpendiculairement à l'un de ses côtés AC: la première impulsion sera à la seconde, comme 1

est à $\sqrt{2}$, ou comme 7 est à 10 environ. Car, dans le premier cas, il n'y a que le triangle ACB qui reçoive le choc, l'autre moitié AMB du quarré n'en est point affectée; et dans le second, il n'y a que le côté AC de choqué. Donc, en nommant M la première impulsion, A la seconde, et de plus B l'impulsion perpendiculaire que recevroit AB, on aura ces deux proportions, $M : B :: 1 : 2$; $B : A :: AB : AC :: \sqrt{2} : 1$; d'où l'on tirera deux valeurs de B, lesquelles étant égalées entr'elles, donneront la proportion, $M : A :: \sqrt{2} : 2 :: 1 : \sqrt{2}$.

373. Problème II. *La demi-circonférence* AQB (Fig. 54) *étant choquée par un fluide dont la direction* OC *est perpendiculaire au diamètre* AB: *on demande le rapport de l'impulsion que recevra cette demi-ciconférence parallèlement à* OC, *à l'impulsion directe et perpendiculaire que recevroit le diamètre* AB?

Ayant divisé la demi-circonférence AQB en une infinité d'élémens Ff, Ll, etc., par les droites Fl, fl parallèle au diamètre AB; et ayant mené les ordonnées FS, fs, LT, lt, etc.; si l'on nomme F le choc direct que recevroit FR, ou Ss, ϕ le choc que reçoit Ff parallèlement à QC, on aura, (370), $\phi = \frac{F \times (FR)^2}{(Ff)^2}$. Soit mené le rayon CF: les triangles semblables FRf, FSC donneront, $FR : Ff :: FS : CF$, et par conséquent $\frac{(FR)^2}{(Ff)^2} = \frac{(FS)^2}{(CF)^2}$. Donc, $\phi = \frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$.

Ainsi, pour avoir l'impulsion totale que reçoit la demi-circonférence parallèlement à $O\,C$, il ne s'agit plus que de trouver la somme de toutes les quantités $\frac{F \times (FS)^2}{(CF)^2}$ ou $\frac{Ss \times (FS)^2}{(CF)^2}$, en représentant l'impulsion directe contre FR ou Ss par cette ligne elle-même. Or, si l'on fait tourner le demi-cercle $A\,B\,Q$ autour du diamètre $A\,B$, il produira une sphère qui aura pour élément $\frac{m}{1} \times (FS)^2 \times Ss$, $\frac{m}{1}$ étant le rapport de la circonférence au diamètre. Par conséquent l'impulsion totale démandée est au solide de la sphère, dans le rapport constant de $\frac{1}{(CF)^2}$ à $\frac{m}{1}$. Mais le solide de la sphère $=$ $m \times (CF)^2 \times \frac{2}{3} A\,B$. Donc l'impulsion cherchée $= \frac{2}{3} A\,B$; c'est-à-dire que l'impulsion directe contre $A\,B$ étant représentée par cette même ligne $A\,B$, l'impulsion que reçoit la demi-circonférence, parallèlement à $O\,C$, est représentée par les deux tiers de $A\,B$. Ces deux impulsions sont donc entr'elles dans le rapport de 3 à 2; et l'une étant connue, l'autre le sera aussi.

Suivant cette théorie, l'impulsion reçue par un cylindre vertical placé au milieu d'une rivière, est les deux tiers de celle que recevroit le parallélépipède rectangle, circonscrit au même cylindre, et exposé par l'une de ses faces au choc perpendiculaire du fluide. Car le demi-cylindre antérieur et la face correspondante du parallélépipède circons-

crit, sont les seules parties qui reçoivent le choc du fluide; elles en garantissent les autres parties.

374. Problème III. *Déterminer en général l'impulsion d'un fluide contre une courbe quelconque, ou contre un solide quelconque ?*

La position de la courbe étant donnée, on trouvera (365) l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre l'un de ses élémens. Cette impulsion pourra toujours être exprimée en fonctions d'une seule variable, au moyen de l'équation de la courbe donnée. On la décomposera en deux forces, parallèles chacune à chacune de deux lignes données de position, que je nomme *A*, *B*, et que je suppose perpendiculaires entr'elles, pour plus de simplicité. Par-là, on aura deux sortes de forces, dont on déterminera les sommes, ou les résultantes, par l'intégration : de plus, on trouvera les positions de ces résultantes, par la théorie des momens. On connoîtra donc les quantités et les directions des forces actuelles qui poussent la courbe parallèlement aux deux lignes *A*, *B*; et par conséquent aussi la résultante de ces deux forces.

La même méthode s'applique à un solide quelconque, en décomposant l'impulsion qui résulte perpendiculairement contre l'un des élémens de ce solide, en trois forces parallèles chacune à chacune de trois lignes données de position *A*, *B*, *C*, qui se croisent en un point, et que l'on peut supposer perpendiculaires entr'elles.

Comme les calculs que ces méthodes générales

demandent, sont un peu longs, sans être difficiles, et que d'ailleurs ils ne peuvent pas être d'un grand usage, je me borne à donner ici les formules pour les cas les plus simples.

1°. Soit FQF' (*Fig.* 55) une courbe, divisée en deux parties égales et semblables QF, QF' par son axe QC; et frappée par un fluide dont la direction est parallèle à cet axe. Ayant mené à l'axe QC, les ordonnées infiniment voisines, PF, pf, et la droite Fr parallèle à QC, soient $PF = y$; $fr = dy$; $Ff = ds$; la vîtesse du fluide $= V$. Nommons de plus F l'impulsion perpendiculaire d'un fluide mu avec la vîtesse U contre une surface plane A donnée et en repos; on voit (361) que l'impulsion perpendiculaire contre fr, a pour expression $\frac{F \,.\, V^2 \,.\, dy}{A \,.\, U^2}$, ou $n \,.\, V^2\, dy$, en nommant, pour abréger, n le coëfficient $\frac{F}{A \,.\, U^2}$, qui est constant et donné, et que j'appellerai en général le *coëfficient de la percussion* *. L'impulsion qui résulte perpendiculairement contre Ff, étant décomposée en deux forces, l'une dirigée suivant FP, l'autre suivant Fr, et la première de ces forces étant détruite par une force égale et contraire qui provient du point F'; il s'ensuit (370) que l'impulsion contre Ff, dans le sens Fr, est $n V^2\, dy \times \frac{dy^2}{ds^2}$, ou $\frac{n V^2 \,.\, dy^3}{ds^2}$. Il ne s'agit plus

* Il faudra se souvenir de cette expression et du sens que j'y attache, parce que j'en ferai un fréquent usage.

que d'éliminer ds de cette formule, au moyen de l'équation de la courbe ; puis d'intégrer.

Supposons, par exemple, que FQF' soit un cercle dont le rayon $CQ = a$. On aura $ds^2 = \frac{a^2 dy^2}{aa-yy}$; et la formule générale $\frac{nV^2 . dy^3}{ds^2}$ deviendra $\frac{nV^2 dy . (aa-yy)}{a^2}$, dont l'intégrale est $nV^2 y - \frac{nV^2 . y^3}{3a^2}$; valeur de l'impulsion contre l'arc indéterminé QF, dans le sens QC. Faisant $y = a$, on aura $\frac{2nV^2 a}{3}$ pour l'impulsion contre le quart de circonférence. Et comme l'impulsion perpendiculaire contre le rayon a seroit (361), $nV^2 . a$: on voit que l'impulsion contre le quart de circonférence, est les deux tiers de l'impulsion perpendiculaire contre le rayon ; et l'impulsion contre la demi-circonférence, les deux tiers de l'impulsion perpendiculaire contre le diamètre; ce qui est conforme à l'article précédent.

Soit, pour second exemple, QF une parabole dont le paramètre $= p$. On trouvera $ds^2 = \frac{dy^2 (pp+4yy)}{p^2}$; et la formule $\frac{nV^2 . dy^3}{ds^2}$ deviendra, $\frac{nV^2 . p^2 dy}{pp+4yy}$, dont l'intégrale est $nV^2 \int \frac{\frac{p^2}{4} dy}{\frac{pp}{4}+yy}$, c'est-à-dire, le produit de

la quantité constante $n V^2$, par un arc de cercle dont la tangente est y pour le rayon $\frac{p}{2}$.

2°. Que la courbe QPF, en faisant une révolution entière autour de l'axe QC, produise un solide. L'élément Ff engendre une zone qui reçoit, dans le sens QC, une impulsion (la seule à laquelle il faille avoir égard), qui est évidemment à l'impulsion perpendiculaire contre la couronne circulaire correspondante engendrée par fr, comme la simple impulsion contre Ff, dans le sens QC, est à l'impulsion perpendiculaire contre fr, c'est-à-dire, comme $\frac{n V^2 . dy^3}{ds^2}$ est à $n V^2 . dy$, ou comme dy^2 est à ds^2. Or, en nommant m le rapport de la circonférence au diamètre, l'impulsion perpendiculaire contre la couronne décrite par fr, est $n V^2 \times 2 m y dy$. Ainsi l'impulsion élémentaire contre la zone décrite par Ff; dans le sens QC, sera $\frac{2 n m V^2 . y dy^3}{ds^2}$. On substituera dans cette expression, pour ds^2 sa valeur donnée par la nature de la courbe; puis on intégrera.

Soit, par exemple, FQF' un cercle dont le rayon $CQ = a$. En mettant pour ds^2 sa valeur $\frac{a^2 dy^2}{aa - yy}$, la formule précédente deviendra $\frac{2nm V^2 y dy (aa - yy)}{a^2}$, dont l'intégrale est $n m y^2 V^2 - \frac{n m V^2 y^4}{2 a^2}$. Faisant $y = a$, on aura $\frac{n m V^2 a^2}{2}$.

pour l'impulsion contre la demi-sphère, ou contre la sphère entière (car cela est indifférent). L'impulsion perpendiculaire contre le plan d'un grand cercle de la sphère, seroit $n V^2 \times m a^2$. Ainsi l'impulsion contre la sphère n'est que la moitié de l'impulsion perpendiculaire contre l'un de ses grands cercles.

Si QF est une parabole dont le paramètre $= p$, la formule $\frac{2nm V^2 . y dy^3}{ds^2}$ deviendra $\frac{2nm V^2 p^2 y dy}{pp + 4yy}$, dont l'intégrale est $\frac{nm V^2 p^2}{4} L . \left(\frac{pp + 4yy}{pp}\right)$.

Remarque sur les trois problêmes précédens.

375. La solution du premier de ces problêmes s'accordera assez avec l'expérience, pourvu que l'angle ORC ou ACD (*Fig.* 52) d'incidence du fluide sur chacune des faces du triangle, soit un peu grand, c'est-à-dire, compris dans l'intervalle de 60 à 90 degrés. Mais, pour les angles d'incidence qui seroient sensiblement moindres que 60 degrés, la théorie ne s'accorde plus avec l'expérience. Alors la percussion ne diminue pas autant, suivant l'expérience, qu'elle devroit diminuer suivant la théorie.

Les deux autres problêmes ne sont destinés qu'à montrer la manière d'appliquer la théorie proposée aux surfaces courbes. Car l'expérience contredit encore ici cette théorie, mais dans un autre sens. En effet, l'expérience fait voir, par exemple, que l'impulsion contre la demi-circonférence AQB

(*Fig.* 54), n'est qu'un peu plus de la moitié de l'impulsion perpendiculaire contre le diamètre *AB*, tandis que suivant la théorie, elle en devroit être les deux tiers. On voit par-là que tous les usages qu'on a faits de cette théorie pour déterminer *le solide de la moindre résistance*, ou pour résoudre en général les problèmes qui se rapportent à la méthode inverse des tangentes, ne donnent que des résultats hypothétiques, qu'on ne doit appliquer à l'art Nautique, qu'avec beaucoup de circonspection.

J'ajoute encore ici un problême, dépendant de la même théorie, pour éclaircir l'explication que Léibnitz a donnée des variations du Baromètre, et que nous avons rapportée (124).

376. Problême IV. *Un corps sphérique, descendant verticalement dans un fluide où il est plongé, on demande l'effort qui résulte de ce mouvement contre le fond du vase?*

Il est évident que le corps, en descendant, frappe à chaque instant le fluide par sa vîtesse acquise; et que ce choc, qui se transmet en tous sens à travers le fluide, agit aussi contre le fond du vase. Cherchons donc sa valeur.

Soient
- le rayon du corps.................. $= a$,
- sa masse ou son poids.............. $= P$,
- le poids du fluide déplacé par le corps.... $= P'$,
- l'espace parcouru verticalement........ $= s$,
- la vîtesse au bout de cet espace......... $= u$,
- le coéfficient de la percussion.......... $= n$,
- le rapport de la circonférence au diamètre. $= m$.

Le

Le corps est poussé à chaque instant de haut en bas par l'excès de son poids sur le poids du fluide déplacé, et sur la résistance qu'il éprouve en frappant le fluide, laquelle a pour valeur $\frac{n m a^2 u^2}{2}$ (373). Ainsi, la force accélératrice absolue du corps est, $P - P' - \frac{n m a^2 u^2}{2}$; et on a, par les formules ordinaires de ces sortes de mouvemens, $P u d u = (P - P' - \frac{n m a^2 u^2}{2}) d s$; ou $d s = -\frac{P}{n m a^2} \times -\frac{2 n m a^2 u d u}{2 P - 2 P' - n m a^2 u^2}$, dont l'intégrale est, $s = A - \frac{P}{n m a^2} \times L.(2 P - 2 P' - n m a^2 u^2)$. La constante A doit être telle que $s = 0$, donne $u = 0$; et par conséquent on a, $s = \frac{P}{n m a^2} \times L.\left(\frac{2 P - 2 P'}{2 P - 2 P' - n m a^2 u^2}\right)$. Donc si l'on nomme c le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1; qu'on multiplie s par $L.c$; et qu'ensuite on repasse des logarithmes aux nombres, on trouvera, $u^2 = 2\left(\frac{P - P'}{n m a^2}\right) \times (1 - c^{-\frac{n m a^2 . s}{P}})$. L'expression du choc du fluide, c'est-à-dire $\frac{n m a^2 u^2}{2}$, devient donc, $(P - P') \times (1 - c^{-\frac{n m a^2 . s}{P}})$.

Comme le nombre c est plus grand que l'unité,

étant compris entre 2 et 3, on voit que la valeur du choc augmente à mesure que s augmente, et que ce choc $= P - P'$, lorsque $s = \infty$.

Il suit de-là que la hauteur dont une goutte de pluie tombe, n'étant jamais fort considérable, la résistance qu'elle éprouve en descendant, ou la pression qu'elle exerce en conséquence sur la surface de la Terre, est toujours sensiblement moindre que le poids de cette même goutte. La pression de l'air sur la cuvette du Baromètre est donc moindre lorsque les gouttes pluviales tombent, que lorsqu'elles sont soutenues en parcelles dans l'atmosphère; et par conséquent le Baromètre doit alors baisser, comme Léibnitz le conclut de son hypothèse.

CHAPITRE XIV.

Considérations générales sur les machines Hydrauliques : Théorie particulière de celles qui sont mues par le choc de l'eau.

377. ON appelle indistinctement *machine hydraulique*, une machine qui est destinée à élever de l'eau à une certaine hauteur, ou qui est mue par l'action d'un courant. Les agens qui produisent ou entretiennent le mouvement dans le premier cas, peuvent être de telle espèce qu'on voudra. Souvent

une machine destinée à élever de l'eau, est en même temps mue par l'action d'un courant. Elle est alors doublement hydraulique. Les effets de toutes ces machines se déterminent, comme ceux des autres, par les loix connues de la Mécanique.

378. Sans rappeler ces loix en détail, considérons que la force mouvante a toujours un rapport déterminable par la forme et le jeu de la machine, à l'effet réel et utile que cette même machine produit, relativement à l'objet qu'on s'est proposé en la construisant. Cette force et cet effet peuvent s'exprimer par des poids connus, animés de vitesses connues. Soient donc P le premier poids; V, sa vitesse; Π, le second poids; v, sa vitesse. Il est d'abord évident que l'effet $\Pi . v$ ne peut jamais surpasser la cause $P . V$. C'est donc en vain que certains Machinistes pensent augmenter le produit de la force motrice, avec des leviers, des roues, ou d'autres moyens équivalens. Les leviers n'ont en eux-mêmes aucune vertu active : ils ne peuvent servir qu'à modifier différemment les deux facteurs P et V qui, par leur multiplication, composent la force mouvante. S'ils font augmenter le poids moteur P, ils font diminuer sa vitesse V en même raison; et réciproquement, s'ils font augmenter V, ils font diminuer P, dans le même rapport. L'effet $\Pi . v$ seroit égal à la cause entière $P . V$, si cette cause n'étoit pas employée en partie à vaincre le frottement, ou à produire dans la machine des mouvemens étrangers et inutiles à celui dont on

a besoin. On a donc dans la pratique, $P.V > \Pi.v$. La meilleure machine sera celle qui, par sa construction et par le jeu de ses pièces, rendra la quantité $\Pi.v$ la plus approchante qu'il est possible de $P.V$. Si l'on regarde $\Pi.v$ comme l'effet total de la machine, ou que l'on comprenne dans cette quantité non-seulement l'effet utile, mais encore ceux qui proviennent des résistances, on aura dans tous les cas, $\Pi.v = P.V$.

379. Le choix d'une machine, la recherche et la combinaison des parties dont elle doit être composée, relativement à l'effet qu'on veut qu'elle produise, appartiennent proprement à la Mécanique. Ici je me propose d'examiner en général l'action d'un fluide, comme principe moteur d'une machine à laquelle cette action est transmise par une roue que le fluide fait tourner, soit en la frappant par sa vîtesse acquise, soit en la pressant par son poids, soit enfin en la poussant par une réaction contraire à la direction de son mouvement. M. J.-Albert Euler, digne fils et émule du grand Géomètre Léonard Euler, a traité ce sujet dans une excellente dissertation qui remporta le prix de l'Académie de Gottingue, en 1754. Il a sur-tout examiné avec le plus grand soin l'effet des machines mues par la réaction de l'eau : et telle est la fécondité de cette matière, qu'elle nous a encore procuré trois beaux mémoires d'Euler le pere (*Académie de Berlin*, 1750, 1751, 1754).

380. Parent est le premier qui ait appliqué avec succès la théorie ordinaire de la percussion des fluides au mouvement des roues qu'un courant fait tourner par le choc (*Académie de Paris*, 1704). Sa méthode porte sur quelques suppositions un peu libres, qui facilitent et simplifient le calcul : mais, quand en suivant d'ailleurs les mêmes principes, on veut traiter la question avec plus de rigueur et plus de généralité, on rencontre des problèmes difficiles, dont la plupart étoient entièrement nouveaux, lorsque j'en fis le sujet d'un mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie (*année* 1769). Voici cette même théorie, avec plus de détail et plus d'étendue.

381. Une roue qui tourne en vertu du choc de l'eau, est garnie à sa circonférence de palettes, vulgairement appelées *ailes* ou *aubes*, que le fluide vient frapper successivement. Cet effort de l'eau fait, à chaque instant, la fonction d'un poids appliqué à l'une des extrémités d'un levier mobile autour de son autre extrémité, qui représente ici le centre de la roue. Je rapporte toutes les roues ainsi mues, à deux espèces : aux roues verticales, mues par un courant horizontal, et aux roues horizontales, dont les aubes inclinées à l'horizon, sont frappées par un courant aussi incliné. De plus, je suppose toujours que les aubes sont dirigées au centre de la roue ; me réservant à examiner dans la suite, par la voie de l'expérience combinée avec la théorie, en quels cas il convient d'incliner

les aubes au rayon. Commençons par les roues verticales.

382. Soit donc la roue verticale $AHLK$ (*Fig.* 56), dont les aubes sont frappées successivement par le courant horizontal $XYTZ$, qui la fait ainsi tourner dans le sens $AHLK$. Toutes ces aubes, égales entr'elles et également espacées, sont des rectangles dont les côtés SK, ED, BA, etc., dirigés au centre, expriment les *hauteurs* des aubes; et les autres côtés horizontaux représentés par les points S, E, B, etc., sont les *largeurs* des aubes. Dans les premiers instans du choc de l'eau, le mouvement de la roue s'accélère par degrés, à-peu-près comme le mouvement des corps qui tombent par la pesanteur. Mais cette accélération est très-prompte; et bientôt le mouvement de la roue parvient à l'uniformité. Alors, pour que ce mouvement se perpétue, il faut que le choc de l'eau soit contre-balancé à chaque instant par la résistance que la machine lui oppose : résistance qui exprime l'effet total de la machine, en y comprenant le frottement et les autres causes étrangères qui tendent à diminuer le produit véritable, le produit utile que l'on cherche à obtenir de la machine. Cet effet total peut toujours être représenté par un poid Π, attaché à l'extrémité d'une corde qui, par le moyen d'une poulie de renvoi, va s'envelopper autour de l'arbre de la roue, et fait monter ce poids à mesure que la roue tourne. Nous supposons que le mouvement soit parvenu à l'uniformité, du moins sensiblement;

ce qui arrive en très-peu de temps. La manière dont il s'accélère dans les premiers instans, est absolument inutile à considérer.

383. Le courant d'eau dans lequel les aubes de la roue viennent se plonger tour-à-tour, peut être regardé, ou comme indéfini en largeur; telle est, par exemple, la largeur d'une rivière par rapport aux roues d'un moulin qu'elle fait tourner; ou bien, la largeur du courant peut être limitée, et suffisante seulement pour que les ailes n'éprouvent pas de frottement contre le fonds et les bords : tels sont les canaux ou les *coursiers*, qui amènent les eaux d'un réservoir contre les ailes d'une roue. La percussion n'a pas la même mesure dans les deux cas, comme nous le verrons dans la suite; mais elle suit d'ailleurs les mêmes loix. C'est pourquoi nous emploierons, pour tous les cas, l'expression indéterminée *courant d'eau* : sauf à fixer dans l'occasion la véritable mesure du choc, ou la quantité que nous avons appelée le *coëfficient* de la percussion (373).

384. Tout l'effet d'une roue mue par le choc de l'eau, dépend de la position et du nombre de ses aubes; de la vitesse de la roue relativement à celle du courant; de la meilleure proportion entre la hauteur et la longueur des aubes; et enfin des moyens d'économiser, lorsque la chose est nécessaire et possible, la quantité du fluide choquant. Examinons par ordre ces différentes questions.

385. Problême I. *De deux aubes, l'une verticale, l'autre inclinée au courant, on demande celle qui reçoit de la part du fluide le plus grand moment d'impulsion ?*

On juge peut-être au premier coup-d'œil que l'aube verticale, c'est-à-dire, celle qui est frappée perpendiculairement, doit procurer le plus grand moment d'impulsion; et tel est en effet le résultat du calcul, quand la roue a de la vitesse au moment du choc. Mais les Auteurs d'Hydraulique ont agité ce problème, parce que si la percussion perpendiculaire est plus grande que la percussion oblique, la surface choquée obliquement est plus grande que la surface choquée perpendiculairement; ce qui fait une espèce de compensation; et que d'ailleurs, quand la roue est en repos, les momens des deux percussions sont égaux. Il n'y a donc qu'un calcul exact qui puisse décider clairement la question.

Le courant $XYTZ$ (*Fig.* 56) ayant une direction horizontale, supposons que l'aile AB soit placée dans la verticale, et l'aile suivante DE, dans une position oblique du courant; menons l'horizontale EO. On voit que la partie AO de l'aile AB, seroit frappée perpendiculairement et librement par le fluide, si l'aile DE qui la couvre et empêche le choc, étoit anéantie; tandis que VE est la partie de l'aile DE qui est réellement frappée obliquement par le fluide. La question est donc de comparer le moment de la percussion perpendicu-

laire et libre contre AO, au moment de la percussion qui résultera perpendiculairement contre VE; car, si l'on trouve que le premier moment est plus grand que le second, il ne s'agira plus que de faire en sorte que l'aile verticale, au moment du choc, ne soit couverte en aucune manière par l'aile placée en arrière.

Soient menées les horizontales infiniment voisines QM, qm, qui déterminent deux élémens correspondans Qq, Mm, de l'aube verticale ef et de l'aube inclinée. Que Mx représente la vîtesse du fluide; et les petits arcs Qt, My, les vîtesses des points Q, M, pour un même instant. Je décompose la vîtesse Mx du fluide en deux autres My, Mz, dont la première est la même que celle du point M de l'aube, et ne produit par conséquent aucun effet sur l'élément Mm, la seconde est la seule à laquelle il faille avoir égard. La percussion perpendiculaire contre l'élément Qq, est la même que si cet élément étant supposé en repos, l'eau venoit le frapper avec la vîtesse $Mx - Qt$; et la percussion qui résulte perpendiculairement contre l'élément Mm, est la même que si cet élément, étant supposé en repos, l'eau venoit le frapper avec la vîtesse Mz. Donc, si l'on nomme n le *coëfficient* de la percussion; V la vîtesse Mx du fluide; u la vîtesse Qt du point Q; V' la vîtesse Mz; R le rayon ou sinus total : il s'ensuit (364) que la première percussion sera représentée par $n \times Qq \times (V-u)^2 \times R^2$, et la seconde,

par $n \times Mm \times V'^2 \times (\sin. DMz)^2$. Par conséquent, en désignant les momens de ces deux percussions par la lettre M écrite au-devant des surfaces choquées; on aura, $M.Qq : M.Mm :: n \times Qq \times (V-u)^2 \times R^2 \times CQ : n \times Mm \times V'^2 \times (\sin. DMz)^2 \times CM$. Or, à cause des arcs semblables Qt, My, qui donnent My ou $zx = u \times \frac{CM}{CQ}$, et à cause des deux triangles rectangles semblables Mnx, MQC, qui donnent $nx = V \times \frac{CQ}{CM}$: on trouve $nz = V \times \frac{CQ}{CM} - u \times \frac{CM}{CQ} = \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right) \times \frac{CQ}{CM}$. D'un autre côté, on a, $\sin. DMz = R \times \frac{nz}{Mz}$, et $(Mz)^2 \times (\sin. DMz)^2 = R^2 \times (nz)^2$; ou $V'^2 \times (\sin. DMz)^2 = R^2 \times \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right)^2 \times \frac{(CQ)^2}{(CM)^2}$. Par conséquent la proportion des momens deviendra, $M.Qq : M.Mm :: Qq \times (V-u)^2 \times CM : Mm \times \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right)^2 \times CQ$; ou (à cause des parallèles MQ, mq, qui donnent $Qq : Mm :: CQ : CM$, et par conséquent $Qq \times CM = Mm \times CQ$), $M.Qq : M.Mm :: (V-u)^2 : \left(V - u \times \frac{(CM)^2}{(CQ)^2}\right)^2$; proportion dont le troisième terme étant évidemment plus grand que le quatrième, fait voir que le premier est aussi plus grand que le second. Ainsi, le moment de la per-

cussion contre l'élément Qq choqué directement, est plus grand que le moment de la percussion contre l'élément Mm choqué obliquement. La même conclusion a lieu pour les surfaces finies AO, VE, qui sont composées d'un même nombre d'élémens Qq, Mm, correspondans chacun à chacun.

386. *Corollaire I.* Lorsque les aubes sont en repos au moment où elles sont choquées par le fluide, on a $u = 0$, et $M.Qq = M.Mm$. Il est donc alors indifférent que le fluide frappe la partie AO de l'aile verticale, ou la partie correspondante VE de l'aile inclinée. Mais, comme la partie OB de l'aile verticale est encore frappée par le fluide, il s'ensuit que même en ce cas il est plus avantageux que l'aile choquée soit posée verticalement, que d'être inclinée au courant.

387. *Corollaire II.* Dans cette même hypothèse de $u = 0$, le moment de l'impulsion contre la partie VE de l'aile inclinée, étant égal au moment de l'impulsion contre la partie AO de l'aile verticale, on voit que plus on multipliera le nombre des aubes, plus le fluide imprimera de force à la roue; car, en augmentant le nombre des aubes, on fait diminuer l'angle ECB, compris entre deux aubes voisines, et on augmente par conséquent le moment de l'impulsion que reçoit la roue, lorsque les ailes se trouvent, relativement au choc, dans la position la plus défavorable; position qui arrive quand l'angle compris entre deux aubes contiguës est divisé en deux parties égales par la verticale.

Comme la loi de continuité s'observe constamment dans les différens états d'accroissement ou de décroissement que peuvent subir les quantités de même espèce, concluons encore de-là, que si une roue tourne avec une vitesse fort lente par rapport à celle du fluide, on augmentera sa force en lui donnant un grand nombre d'ailes.

388. *Remarque I.* Il se présente à ce sujet une difficulté qui pourroit embarrasser quelques lecteurs, et qu'il est à propos d'éclaircir. En supposant la roue immobile à l'instant du choc, il est clair que dans la rigueur géométrique, le nombre le plus avantageux d'ailes doit être *infini*. Or, dira-t-on, si le nombre des ailes devient infini, leurs extrémités formeront une circonférence de cercle *FBGO* (*Fig.* 57); et l'impulsion qui résultera perpendiculairement contre chaque élément *KN* de l'arc *FBG* étant dirigée au centre *C*, ne tendra à produire aucun mouvement de rotation; d'où il paroît s'ensuivre que bien loin que la roue reçoive alors le plus grand moment possible d'impulsion, elle n'en recevra point du tout. Mais il faut remarquer que dans notre calcul les ailes sont regardées comme une suite de plans différemment inclinés, tous dirigés au centre, et frappés par le fluide sous différentes obliquités; que si par conséquent on détruit cette hypothèse, on détruit nécessairement les conséquences qui en résultent. Or, la supposition que *FBG* est un arc-de-cercle, continu et composé d'élémens *KN*, qui loin d'être dirigés au centre

C, sont perpendiculaires aux rayons *CK*, est entièrement contraire à la précédente. Il n'est donc pas surprenant qu'on arrive à des résultats très-différens dans les deux cas.

Concluons cependant de-là, que comme les filets d'eau sont composés de molécules physiques, ou qui ont des grosseurs finies, et que de plus ces filets se gênent les uns les autres dans leurs mouvemens, les extrémités des ailes doivent toujours laisser entre elles un certain intervalle qui permette au fluide d'exercer son action autant qu'il est possible. Le nombre d'ailes qu'il convient de donner à une roue en repos, et à plus forte raison à une roue en mouvement, pour se procurer la plus grande force qu'il est possible de la part du fluide, est donc toujours fini et limité. A quoi on peut ajouter qu'en multipliant le nombre des ailes, on rend la roue plus pesante, et par-là sujette à un plus grand frottement.

389. *Remarque II.* Plusieurs Auteurs (*Mém. de l'Acad.* 1729, *pag.* 253; *Architec. Hyd. Tome I, pag.* 309) ont établi en général l'avantage de l'aile verticale sur l'aile inclinée d'une manière erronée. Voici leur raisonnement. Il est certain, disent-ils, que si l'aile *DE* (*Fig.* 56) trempe dans l'eau, tandis que l'aile *AB* est encore dans la verticale, la partie *VE* de la première couvrira la seconde sur toute la hauteur *AO* qui ne sera point frappée; et qu'ainsi l'aile *AB* sera seulement frappée dans la partie *OB*. Il est vrai, poursuivent-ils, que cette diminution de choc semble réparée par l'impulsion que reçoit la

partie VE, qui est plus grande que la partie AO: mais la compensation n'est pas complète; car la percussion directe contre AO ou VI, est à la percussion qui résulte perpendiculairement contre VE, comme $VI \times R^2$, est à $VE \times (\sin. VEI)^2$, ou comme $VI \times (VE)^2$, est à $VE \times (VI)^2$, ou enfin comme VE est à VI. De-là, concluent-ils, il faut que l'extrémité E de l'aile DE (*Fig.* 58) ne fasse que rencontrer la surface XY du fluide, au moment que l'aile AB cesse d'être verticale. Alors, il est facile de déterminer le nombre des ailes dont une roue doit être garnie; car, dans le triangle rectangle EAC, on connoit le côté CA qui est le rayon de la roue $AHLK$, et l'hypothénuse CE, puisque la hauteur DE de l'aile est donnée. Ainsi on connoîtra l'arc DA. Divisant la circonférence entière par la valeur de l'arc DA, le quotient exprimera le nombre des ailes de la roue. Les Auteurs dont il s'agit, ont ainsi calculé laborieusement des Tables du nombre des ailes d'une roue, relativement au rayon de cette roue, et à la hauteur des ailes.

Tout cet édifice de calcul tombe, 1°. parce qu'on n'y tient pas compte des différens bras de levier de l'aile verticale et de l'aile inclinée; 2°. parce que si, dans le cas de la *Figure* 58, le moment de l'impulsion de l'eau contre l'aile verticale AB est le plus grand qu'il est possible; d'un autre côté, lorsque l'aile DE a pris une position telle que l'angle ECB est divisé en deux parties égales par la verticale, le moment de l'impulsion est moindre alors qu'il

ne seroit si la roue avoit un plus grand nombre d'ailes, et qu'on étoit incertain si le moment *moyen* ne sera pas plus grand dans le second cas que dans le premier.

Ce même paralogisme a déjà été relevé dans un Mémoire sur les machines hydrauliques (*Savans Étrangers, Tome I, page* 261). Mais l'Auteur de ce Mémoire a lui-même employé un faux principe, d'après lequel il conclut que le moment de l'impulsion contre la partie *VE* de l'aile inclinée *DE* (*Fig.* 56) est toujours égal au moment de l'impulsion contre la partie correspondante *AO* de l'aile verticale, soit qu'au moment où la roue est choquée, elle soit en repos, soit qu'elle tourne déjà. La chose n'est vraie que pour le premier cas. Quand, à l'instant du choc, la roue a déjà une vîtesse acquise, le premier moment est moindre que le second. La manière dont l'Auteur en question mesure la percussion d'un fluide contre un plan mobile, est fautive. il décompose la vitesse du plan en deux autres, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire à la direction du fluide; et il affirme que le fluide n'agit sur le plan qu'en vertu de l'excès de sa propre vîtesse sur la première des deux vitesses dont on vient de parler. Or, il est évident qu'en vertu de la vîtesse que le plan a perpendiculairement à la direction du fluide, ce plan est repoussé par l'eau, de la même manière que s'il étoit en repos, et que l'eau vînt le frapper avec cette même vîtesse; d'où résulte une nouvelle impulsion qui se combine avec la première, et que l'Auteur a

négligée mal-à-propos. Son Mémoire contient d'ailleurs plusieurs choses vraies et utiles.

390. Problème II. *Déterminer la vîtesse que la roue doit prendre par rapport à celle du courant, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Imaginons ici avec Parent (nous donnerons successivement plus de généralité au problème) qu'à la place des aîles AB, DE (*Fig.* 56), réellement choquées par le fluide, on substitue une seule aube qui soit frappée perpendiculairement, et qui, avant le choc, ait déjà une vîtesse uniforme et permanente; que la hauteur de cette aube fictive soit assez petite pour que les vîtesses de rotation de tous ses points puissent être censées égales, et que son centre de gravité puisse être regardé comme le centre de percussion du fluide. Nommons B la surface de cette aube; u la vîtesse de son centre de gravité; b la distance de ce point au centre de la roue; V la vîtesse du fluide; Π le fardeau élevé, dont la quantité de mouvement représente l'effet de la machine, v sa vîtesse, c son bras de levier par rapport au centre de la roue; n le coëfficient de la percussion: le choc perpendiculaire reçu par la surface B sera $n \,.\, B \times (V - u)^2$; et son moment par rapport au centre, $n \,.\, B (v - u)^2 \times b$. Égalant ce moment à celui du poids Π, on aura, $n \,.\, B (V - u)^2 \times b = \Pi c$. Et comme on a, $b : c :: u : v$, et par conséquent $c = \frac{bv}{u}$; si l'on met pour c cette valeur, on aura, $n \,.\, B (V - u)^2 \,.\, u = \Pi v$. Or, le produit Πv, qui

qui exprime l'effet de la machine, doit être un *maximun;* donc $n . B (V - u)^2 . u$, ou simplement $(V - u)^2 . u$, en sera aussi un. Prenant donc la différentielle de cette quantité et l'égalant à zéro, on trouvera $u = \frac{V}{3}$; d'où l'on voit que l'aube qui reçoit le choc perpendiculaire du fluide, doit prendre le tiers de la vîtesse du courant, afin que la machine produise le plus grand effet possible.

Quant à l'expression de cet effet, on la trouvera, en mettant pour u sa valeur $\frac{V}{3}$ dans l'équation $\Pi v = n . B (V - u)^2 . u$: par-là, on aura $\Pi v = \frac{4 n . B . V^3}{27}$.

391. *Corollaire.* Pour pouvoir faire usage de cette formule, fixons le coëfficient n ou $\frac{F}{A . U^2}$ de la percussion (374). La vîtesse U et la surface A étant données, nous pouvons supposer ici, $A = B$, $U = V$. Cela posé :

1°. Si la roue tourne dans un fluide indéfini en largeur, et qu'on nomme H la hauteur dûe à la vîtesse de ce courant, on a sensiblement, suivant l'expérience, $F = B . H$. Ainsi l'expression $\Pi v = \frac{4 n B . V^3}{27}$ du plus grand effet de la machine, deviendra $\Pi v = B . H \times \frac{4}{27} V$. La mesure de cet effet est donc un poids d'eau, exprimé par $B . H$, mu avec les $\frac{4}{27}$ de la vîtesse du fluide; ou les $\frac{4}{27}$ de ce poids mu avec la vîtesse entière du fluide.

2°. Lorsque la roue tourne dans un coursier étroit où les aubes ont simplement la liberté de se mouvoir sans frottement, soit au fond, soit vers les parois; la percussion est plus grande, et l'expérience donne pour lors, $F = 2\,B\,.\,H$, à-peu-près (H étant toujours la hauteur dûe à la vitesse du courant). Le plus grand effet de la machine est donc en ce cas, $B \times H \times \frac{8}{27} V$, sensiblement.

392. *Remarque.* Nous pouvons évaluer l'effet de la machine dans les deux cas, d'une autre manière qui nous sera utile dans la suite. Pour cela, considérons qu'il est permis de regarder la surface donnée B de l'aile choquée comme un orifice par lequel il passe dans un temps donné une quantité donnée d'eau, puisque la vitesse V du fluide est constante. Supposons que dans *une seconde,* il passe par B une quantité d'eau $= Q$; prenons pour base, d'après l'expérience, que les corps graves parcourent quinze pieds à-peu-près, pendant la première seconde de leur chute; exprimons toutes les mesures linéaires en pieds; et souvenons-nous que dans les applications de nos formules, la loi des homogènes doit être remplie conséquemment à ces suppositions. En nommant g la gravité; H la hauteur dûe à la vitesse V du fluide; k la hauteur dûe à la vitesse v du fardeau Π : on aura $V^2 = 2\,g\,.\,H$; $v^2 = 2\,g\,.\,k$; et (224), $Q = 2\,B \sqrt{15\,H}$, ou $B = \frac{Q}{2\sqrt{15\,H}}$. Par conséquent les expressions du plus grand effet de la machine deviendront :

$$\text{I}^{\text{er}}.\ \text{Cas},\ \Pi\sqrt{k} = \frac{2Q.H}{27\sqrt{15}},$$

$$\text{II}^{\text{e}}.\ \text{Cas},\ \Pi\sqrt{k} = \frac{4Q.H}{27\sqrt{15}}.$$

393. Problème III. *La roue étant toujours supposée conduite par l'impulsion perpendiculaire du fluide contre une seule aube rectangulaire donnée en surface, mais dont la hauteur n'est plus regardée comme infiniment petite : on demande le rapport que la largeur et la hauteur de l'aube doivent avoir entr'elles, et la vitesse qu'un point donné de l'aube doit prendre, afin que l'effet de la machine soit un* maximum ?

Soient (*Fig.* 56) CB le rayon extérieur donné de la roue; AB la hauteur de l'aube qui est frappée librement et en entier, et dont la largeur est une ligne droite horizontale; ab sa position après un instant; Qq l'un quelconque de ses élémens; Π le fardeau élevé, lequel exprime par sa quantité de mouvement, l'effet de la machine.

Supposons
- CB .... $= a$,
- CA .... $= x$,
- CQ .... $= z$,
- la surface donnée de l'aube........ $= B$,
- sa largeur........................ $= r$,
- la vitesse uniforme du courant.... $= V$,
- la vitesse uniforme Bb du point donné B à l'instant du choc...... $= u$,
- la vitesse du fardeau Π........ $= v$,
- son bras de levier................ $= c$,
- le coëfficient de la percussion..... $= n$.

La vitesse du point Q est $\frac{zu}{a}$; et le moment de la percussion perpendiculaire contre Qq, est $n.r.z\,dz\left(V-\frac{zu}{a}\right)^2$, expression qu'il faut intégrer en regardant z seule comme variable, de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $z=x$, et reçoive sa valeur complète lorsque $z=a$, Par-là on trouvera, que le moment de l'impulsion contre l'aube entière, est

$$nr\left[\frac{V^2(a^2-x^2)}{2}-\frac{2Vu(a^3-x^3)}{3a}+\frac{u^2(a^4-x^4)}{4a^2}\right].$$

Ce moment doit être égal à celui Πc du poids Π; et par conséquent on a

$$\Pi c=nr\left[\frac{V^2(a^2-x^2)}{2}-\frac{2Vu(a^3-x^3)}{3a}+\frac{u^2(a^4-x^4)}{4a^2}\right].$$

Or, comme on a, $r(a-x)=B$; et que $a^2-x^2=(a-x)\times(a+x)$; $a^3-x^3=(a-x)\times(a^2+ax+x^2)$; que $a^4-x^4=(a-x)\times(a^3+a^2x+ax^2+x^3)$; que de plus on a, $u:v::a:c$, ou $c=\frac{av}{u}$: il s'ensuit que l'équation précédente pourra se changer en celle-ci,

$$\text{(A)}\quad \Pi v=nB\left[\frac{V^2u(a+x)}{2a}-\frac{2Vu^2(a^2+ax+x^2)}{3a^2}+\frac{u^3(a^3+a^2x+ax^2+x^3)}{4a^3}\right].$$

Maintenant, pour que l'effet Πv de la machine devienne un *maximum*, par les valeurs convenables de x et u, il faut différencier le second membre, en faisant varier successivement x et u, et égaler à zéro chacune des deux différentielles, ce qui donnera ces deux équations :

$6 a^2 V^2 u - 8 V u^2 a (a + 2x) + 3 u^3 \times (a^2 + 2ax + 3x^2) = 0;$

$6 V^2 a^2 (a + x) - 16 V u a (a^2 + ax + x^2) + 9 u^2 (a^3 + a^2 x + a x^2 + x^3) = 0;$

lesquelles, combinées ensemble, donneront les valeurs de x et u, qu'on substituera dans l'équation (A), pour avoir l'expression du plus grand effet de la machine. Je n'écris pas ces valeurs : dans chaque cas particulier on abrégera le calcul, en commençant par substituer, à la place des grandeurs connues, leurs valeurs numériques.

394. *Remarque I.* Si dans l'équation (A) on suppose que la hauteur de l'aube soit infiniment petite, ou sensiblement telle par rapport au rayon a; alors, en substituant a pour x, et déterminant u, par la condition que Πv soit un *maximum*, on trouvera $u = \frac{V}{3}$, comme dans l'*article* 390. Et en effet, les bases des calculs sont les mêmes dans les deux cas. Mais, si sans regarder la hauteur de l'aube comme infiniment petite, on la regarde seulement comme fort petite par rapport au rayon a, de sorte que supposant $a - x = h$, ou $x = a - h$, h soit une quantité donnée dont on puisse négliger le quarré et les

puissances plus hautes : l'équation (A), en éliminant x, deviendra d'abord

$$\Pi\, v = n\, B \left[\frac{V^2 u (2a - h)}{2a} - \frac{2 V u^2 (a - h)}{a} + \frac{u^3 (2a - 3h)}{2a} \right].$$

D'où l'on tire immédiatement, en différenciant suivant u, et égalant la différentielle à zéro,

$$u = \frac{V(4a - 4h) \pm V\sqrt{(4aa - 8ah + 7h^2)}}{3(2a - 3h)}$$

Employant le signe inférieur du radical, développant ce radical, et faisant les réductions que demande l'omission des termes qui contiendroient h^2 et les puissances plus hautes, on trouvera :

$$u = \frac{V}{3} \times \left(1 + \frac{h}{2a}\right),$$

Expression de la vitesse u la plus avantageuse. Cette formule s'applique principalement aux roues qui tournent dans des coursiers, parce qu'en effet la hauteur des aubes de ces roues est ordinairement fort petite par rapport au rayon.

Supposons, par exemple, $a = 8$ pieds, $h = 8$ pouces : on aura $u = \frac{V}{3} \times \frac{25}{24}$.

395. *Remarque II.* Les roues qui tournent dans des coursiers, demandent une autre considération qui peut être importante en certains cas. Dans les calculs précédens, nous avons regardé la vitesse V du fluide comme constante et donnée, quelques changemens qui arrivent aux dimensions et à la

vitesse de l'aube; mais pour les coursiers, ces changemens peuvent influer d'une manière sensible sur l'action du fluide contre la roue. Je m'explique.

Soit $SDKR$ (*Fig.* 59) la face verticale d'un réservoir, dans laquelle est pratiqué le pertuis rectangulaire $MNOP$. Que SR représente le niveau de l'eau. Supposons qu'au pertuis $MNOP$ soit adapté un canal ou coursier rectangulaire qui conduit l'eau contre les ailes d'une roue. Comme il faut toujours que les aubes aient un certain jeu dans le coursier pour éviter le frottement contre son fond et ses parois, nous pouvons imaginer que l'aube qui reçoit le choc perpendiculaire de l'eau, est représentée par le rectangle $mnop$, dont les côtés sont parallèles à ceux du rectangle $MNOP$, et en sont distans d'une petite quantité donnée. Ainsi, il n'y a que l'eau qui sort par le pertuis $mnop$ qui soit employée à mouvoir l'aube; celle qui sort par les vides rectangulaires Mp, No, Oz, coule en pure perte. Concevons maintenant que l'aile $mnop$ est transformée en une autre aussi rectangulaire $efgh$ d'égale surface, et qu'en conséquence le pertuis $MNOP$ soit transformé en un autre $EFGH$, tel que les jeux Ee, Ff, Hi, de la nouvelle aile sont les mêmes que ceux Mm, Nn, Pz, de la première. La quantité d'eau que le réservoir peut fournir, étant supposée limitée et donnée, il est clair que le niveau primitif s'abaissera quelque part en Sr. Or, reste à savoir si, en vertu de cette dépression, le moment de l'impulsion de l'eau contre

l'aube ne diminue pas. Ce qui donne lieu à ce doute, c'est qu'il s'écoule d'autant plus d'eau en pure perte, que le vide rectangulaire Gi a une plus grande base GH; car la charge d'eau qui lui répond, est plus grande que celle qui répond aux vides latéraux Fg, Eh, Np, No. De-là naît le problême suivant.

396. Problême IV. *Déterminer les dimensions et la vîtesse les plus avantageuses d'une aube frappée perpendiculairement par un fluide, en supposant que les vîtesses du fluide, aux différens points de l'aube, soient dûes aux hauteurs correspondantes du réservoir?*

Soient $ABPM$ la moitié du pertuis; $Abpm$ la moitié de l'aube cherchée; C le centre de la roue; SR le niveau de l'eau dans le réservoir; Q un point indéterminé de l'aube, auquel répond une vîtesse dûe à la hauteur QT.

Supposons {
- la gravité .... $= g$,
- le rayon extérieur Cb de la roue .... $= a$,
- $2Am$ .... $= r$,
- CT .... $= p$,
- CA .... $= x$,
- CQ .... $= z$,
- la vîtesse de rotation du point b de l'aube .... $= u$,
- la vîtesse du fardeau élevé Π .... $= v$,
- son bras de levier .... $= c$,
- le coëfficient de la percussion .... $= n$.

La vîtesse de l'eau qui sort par le petit orifice rectangulaire $Qqdc$, et qui choque en cet endroit

la partie élémentaire de l'aube, a $\sqrt{[2g.(z-p)]}$, pour expression; la vitesse de rotation du point Q de l'aube ou de sa partie élémentaire $Qpdc$, est $\frac{zu}{a}$. Ainsi le moment élémentaire de l'impulsion perpendiculaire de l'eau sera $nr.zdz\left(\sqrt{[2g.(z-p)]}-\frac{zu}{a}\right)^2$. Donc, en intégrant de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $z=x$, et reçoive sa valeur complette lorsque $z=a$, on aura

$$nr\left[\frac{2g(a^3-x^3)}{3}-gp(a^2-x^2)-\frac{2u\sqrt{2g}}{a}\right.$$
$$\times\left(\frac{2p^2[(a-p)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}}]}{3}\right.$$
$$+\frac{4p[(a-p)^{\frac{5}{2}}-(x-p)^{\frac{5}{2}}]}{5}$$
$$\left.+\frac{2[(a-p)^{\frac{7}{2}}-(x-p)^{\frac{7}{2}}]}{7}\right)$$
$$\left.+\frac{u^2(a^4-x^4)}{4a^2}\right];$$

pour le moment de l'impulsion de l'eau contre l'aire entière $mnop$. Ce moment doit être égal à celui Πc du fardeau élevé. Mais, pour abréger et pour mettre tout de suite sous sa dernière forme, l'équation qui doit résulter de-là, observons que la surface de l'aube étant donnée, on a (en nommant B cette surface), $r(a-x)=B$, ou $r=\frac{B}{a-x}$; observons de plus qu'on a, $u:v::a:c$, ou $c=\frac{av}{u}$. En

substituant ces valeurs de r et c, on aura pour l'équation de l'effet de la machine,

$$(B)\quad \Pi v = \frac{nBu}{a(a-x)}\Bigg[\frac{2g(a^3-x^3)}{3} - gp\,(a^2-x^2)$$
$$-\frac{2u\sqrt{2g}}{a}\Bigg(\frac{2p^2[(a-p)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}}]}{3}$$
$$+\frac{4p[(a-p)^{\frac{5}{2}}-(x-p)^{\frac{5}{2}}]}{5}$$
$$+\frac{2[(a-p)^{\frac{7}{2}}-(x-p)^{\frac{7}{2}}]}{7}\Bigg)$$
$$+\frac{u^2}{a^2}\cdot\frac{(a^4-x^4)}{4}\Bigg].$$

Maintenant, soit Q, la quantité d'eau qui sort pendant une seconde, par l'orifice $MNOP$; ϖ chacune des petites lignes mM, nN, bB, qui expriment les jeux de l'aube dans le coursier : on aura $MN = r + 2\varpi$; $TB = a - p + \varpi$; $TA = x - p$; et en prenant pour principe d'expérience, que les corps graves parcourent quinze pieds pendant la première seconde de leur chute, l'article 238 donne,

$$Q = \frac{4l(r+2\varpi).\sqrt{15}.[(a-p+\varpi)^{\frac{3}{2}}-(x-p)^{\frac{3}{2}}]}{3}.$$

Substituant dans cette dernière équation, pour r sa valeur $\frac{B}{a-x}$; dégageant p, au moins par approximation; puis substituant cette valeur dans l'équation (B), on aura une équation, dans laquelle il n'entrera plus d'indéterminées que x et u, la quantité

Q étant supposée donnée. On rendra donc l'effet de la machine, un *maximum*, en différenciant le second membre de cette équation, suivant x et u, et égalant à zéro les deux différentielles; ce qui donnera deux équations analogues à celles que l'on a tirées de l'équation (A) dans l'article 393, et tendantes au même but.

Si Q n'étoit pas donné, mais que p le fût, ou que le niveau SR de l'eau dans le réservoir occupât une position fixe, on différencieroit tout de suite l'équation (B), suivant x et u; etc.

Si dans l'équation (B), p et x étoient données, on différencieroit suivant u seulement; et on auroit un résultat analogue à celui de l'article 394.

Je me contente d'indiquer tous ces calculs, qui sont, pour la plupart, fort longs, sans être difficiles, et qu'on abrégera (si on est tenté de les entreprendre), en substituant dans chaque cas particulier, à la place des grandeurs connues, leurs valeurs numériques.

Ajoutons que dans la pratique, au lieu de chercher par ces méthodes générales, les dimensions et la vîtesse les plus avantageuses de l'aube, il vaudra mieux comparer ensemble les effets de deux aubes, telles que $mnop$, $efgh$, correspondantes aux deux pertuis $MNOP$, $EFGH$; et choisir celle qui, pour une quantité donnée d'eau, ou pour une hauteur donnée d'eau dans le réservoir, procure le plus grand effet. Ce tâtonnement ne sera jamais fort long; et on en tirera des résultats suf-

fisamment exacts dans la pratique : car on sait qu'une quantité, qui doit être un *maximum* ou un *minimum*, jouit physiquement de la même prérogative, sur une certaine étendue, en deçà et au de-là de sa limite mathématique.

CHAPITRE XV.

Continuation du même sujet : des roues verticales mues par le choc de l'eau, en ayant égard aux différentes impulsions de l'eau contre les aubes réellement choquées.

397. Nous avons réduit dans le chapitre précédent, les effets des impulsions de l'eau contre les aubes d'une roue, au seul effet d'une aube, qui seroit choquée perpendiculairement par le fluide. Cette transformation, qui simplifie le calcul, est permise quand la roue est en repos à l'instant du choc. Mais elle ne l'est pas, du moins en rigueur, quand la roue tourne déjà par une vîtesse acquise, au moment qu'elle reçoit le coup du fluide. Il faut alors, pour obtenir cette généralité si précieuse aux Géomètres, déterminer toutes les impulsions, à raison des différentes obliquités des chocs. Ce problème qui est résolu dans mon Mémoire de 1769, trouve ici sa véritable place. Commençons par éta-

blir les élémens qui doivent servir de base à mes calculs.

398. Soit $SBDK$ (*Fig.* 60) la circonférence extérieure d'une roue, plongée dans un courant horizontal $XYTZ$, dont tous les points se meuvent suivant des directions parallèles entre elles, et avec une même vitesse uniforme. Que cette roue porte un nombre quelconque d'aubes Ee, Ff, Gg, Hh, etc., dirigées au centre C. Ayant abaissé la droite CI, verticale, ou perpendiculaire à la surface XY du fluide; soient menées parallèlement à la même surface les droites $E1$, $F2$, $G3$, $H4$, etc. Il est clair qu'en allant de S vers B, les dernières aubes sont couvertes et garanties en partie du choc de l'eau, par les précédentes. J'aurai simplement égard à l'impulsion du fluide, contre les parties EV, FV', GV'', etc., des aubes; et je supposerai que les parties $V'f'$, $V''g'$, etc. n'éprouvent aucun choc, ou du moins, je négligerai un tel choc, en cas qu'il existe réellement. Cette manière d'envisager l'action du fluide me paroît exacte, ou du moins, très-admissible dans un problême physico-mathématique, tel que celui-ci, qui participe nécessairement à la disette où l'on est encore d'une méthode rigoureuse, pour résoudre en général le problême de la percussion des fluides. En effet :

1°. Dans les roues placées sur les rivières, il est évident que le fluide, après avoir frappé les parties EV, FV', GV'', etc. se réfléchit, glisse

par les côtés et se mèle avec le fluide environnant. Il ne lui reste donc, dans le sens du courant, qu'une vitesse fort petite, laquelle ne peut par conséquent produire qu'un choc insensible. Je conviens que, si les intervalles des aubes étoient très-considérables, le fluide pourroit acquérir de nouveau, dans l'intervalle de deux ailes, une vitesse capable de donner une impulsion sensible à l'aube antécédente; mais ce cas n'a pas lieu dans la pratique, sur-tout quand on a besoin de donner (comme il convient de le faire) au moins huit à dix aubes à la roue.

2°. Quant aux roues plongées dans des coursiers, le fluide, après avoir choqué les parties EV, FV' GV''; etc. n'a pas tout-à-fait la même liberté de se dégager des aubes, que dans le premier cas; mais il trouve néanmoins à s'échapper; il glisse en partie sur les ailes; l'autre partie sort par les vides qui se trouvent entre l'aube et le coursier, et par le vide que deux aubes contiguës laissent au fond, lorsque la droite qui divise en deux parties égales l'angle formé par les deux aubes, est placée dans la verticale. L'impulsion contre les parties EV, FV', GV', etc. est donc incomparablement plus sensible que le choc (supposé qu'il existe en effet), contre les parties $V'f'$, $V''g'$, etc. ou que la pression soufferte par ces mêmes parties, en vertu de la hauteur.

399. Problême I. *Déterminer la somme des momens d'impulsions du fluide, contre toutes les*

parties des aubes, qui reçoivent à la fois ces impulsions, la roue étant supposée tourner par une vitesse acquise, à l'instant du choc?

I. Soit Mm un élément quelconque de la partie EV de la première aube choquée. Du point S où la circonférence $SBDK$ rencontre la surface du fluide, soit mené le rayon SC. Que les droites infiniment petites Mx, My représentent respectivement les espaces parcourus en un instant, par le fluide et par le point M de l'aube. Je décompose la vîtesse Mx en deux autres My, Mz: Il est évident que le fluide n'agit sur l'élément Mm qu'en vertu de la seconde vitesse Mz. Soit prolongée jusqu'en n la droite xz qui sera évidemment perpendiculaire à EV. Dans les calculs des momens cherchés, nous ferons abstraction de la largeur de chaque aube, parce que cette largeur est un facteur constant, dont on pourra ensuite affecter tous les termes des formules.

Soient:

le rayon extérieur CB de la roue.....	$= a$,
le sinus total.....................	$= 1$,
l'angle constant SCI.............	$= m$,
l'angle variable ECI.............	$= p$;
l'angle constant compris entre deux aubes voisines.............	$= q$,
la vitesse du fluide...............	$= V$,
la vitesse uniforme de la circonférence $SBDK$.................	$= u$;
EM...........................	$= x$,
le coëfficient de la percussion.......	$= n$.

On aura évidemment My ou $zx = \frac{u \times (a - x)}{a}$, $nx = V \cos. p$; $nz = nx - zx = V. \cos. p - \frac{u(a-x)}{a}$; $\sin. zMn = \frac{nz}{Mz} = \frac{a V \cos. p - u(a-x)}{a \times Mz}$. Donc, l'impulsion perpendiculaire du fluide contre l'élément Mm, qui est $n \times Mm \times (Mz)^2 \times (\sin. zMn)^2$, deviendra $\frac{n dx [a V \cos. p - u(a-x)]^2}{a^2}$; et si l'on nomme dM le moment de cette impulsion élémentaire, on aura

(A) $$dM = n\, d.x \left[V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p} \right]^2 \times (\cos. p)^2. (a-x).$$

II. On voit que cette équation s'intègre sans aucune difficulté. Mais avant que de faire cette opération, j'observe que si la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p}$ au lieu d'être positive étoit négative, ce seroit l'aile qui pousseroit le fluide au lieu d'en être poussée. Cependant comme le quarré de l'une et l'autre expression est toujours le même, on ne pourroit pas discerner lequel des deux cas a lieu, si l'on intégroit à l'ordinaire. Voici donc ce qu'il faut faire en général. On examinera ce que devient la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p}$, lorsque $x = EV = CE - CV = a - \frac{Ck}{\cos. p} = a - \frac{a \cos. m}{\cos. p}$, et lorsque

lorsque $x = 0$. Cela posé, 1°. si la quantité en question est positive dans les deux cas, le fluide pousse l'aile dans toute l'étendue VE, et le calcul se fait comme nous le verrons tout-à l'heure; 2°. si cette quantité est négative dans les deux cas, l'aile pousse le fluide dans toute l'étendue VE, et le calcul se fait encore de la même manière; 3°. si la même quantité est positive dans le premier cas, et négative dans le second, une partie VR de l'aile est poussée par le fluide, tandis qu'au contraire l'autre partie RE de l'aile pousse le fluide. Alors on déterminera le moment M de manière que l'intégrale s'évanouisse lorsque $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p} = 0$, ou lorsque $x = \frac{au - Va \cos. p}{u}$, et qu'elle reçoive sa valeur complète, lorsque $x = EV = a - \frac{a \cos. m}{\cos. p}$. Soit nommée G cette intégrale qui exprime le moment de l'impulsion de l'eau contre VR. On déterminera encore M de manière que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $x = 0$, et reçoive sa valeur complète, lorsque $x = ER = \frac{au - Va \cos. p}{u}$. Soit nommée H cette intégrale qui exprime le moment de l'impulsion de la partie RE de l'aile contre le fluide. Il est clair que $G - H$, ou $H - G$ représentera le moment de la force résultante qui pousse l'aile ou le fluide.

Je n'ai pas besoin d'ajouter que si la quantité

$V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p}$ est positive en E, elle le sera, à plus forte raison en V, et dans toute l'étendue EV.

Il est évident que le procédé du calcul est le même dans les trois suppositions, et qu'il s'agit toujours de prendre une somme ou une différence de momens d'impulsion. Je n'examinerai ici que la première, parce que dans la pratique, il convient que le fluide pousse l'aube sur toute l'étendue de la partie qu'elle trempe dans l'eau. Or cela arrivera, si l'on a seulement $V \cos. p = u$, ou $\cos. p = \frac{u}{V}$. Soit, par exemple, $u = \frac{V}{3}$: on aura $\cos. p = \frac{1}{3}$, et par conséquent l'angle $p = 70 \frac{1}{2}$ degrés. Il faut donc alors que la quantité, dont l'aube trempe dans l'eau, suivant la verticale, soit moindre que les deux tiers du rayon. L'enfoncement des roues qui trempent dans des coursiers, est toujours très-petit par rapport au rayon. Dans les roues placées sur des rivières, l'enfoncement n'atteint pas, à beaucoup près, la limite qu'on vient d'indiquer. Ainsi, mon calcul aura toute la généralité dont nous avons besoin. Il est clair que la quantité $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. p}$ étant ainsi supposée positive, les quantités $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. (p-q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. (p-2q)}$, $V - \frac{u(a-x)}{a \cos. (p-3q)}$, etc., seront positives à plus forte raison.

III. En intégrant l'équation (A) de manière que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $x = 0$, et qu'elle reçoive sa valeur complète, lorsque $x = EV = a - \frac{a \cos. m}{\cos. p}$, on trouvera

$$M = \frac{n a^2 V (\cos. p^2 - \cos. m^2)}{2} - \frac{2 n a^2 V u}{3} \times \left(\cos. p - \frac{\cos. m^3}{\cos. p^2}\right) + \frac{n a^2 u^2}{4}\left(1 - \frac{\cos. m^4}{\cos. p^4}\right)^*.$$

Nous ferons, pour abréger, $n a^2 V^2 = N$, $u = k V$, k étant un coëfficient donné ; en sorte que $M = N \left[\frac{\cos. p^2 - \cos. m^2}{2} - \frac{2 k}{3} \times \left(\cos. p - \frac{\cos. m^5}{\cos. p^2}\right) + \frac{k^2}{4} \left(1 - \frac{\cos. m^4}{\cos. p^4}\right)\right]$.

IV. En nommant M' le moment de l'impulsion de l'eau contre la partie FV' de l'aîle suivante, on trouvera toujours par la même méthode,

$$M' = N \left[\frac{\cos. (p - q)^2 - \cos. p^2}{2} - \frac{2 k}{3} \times \left(\cos. (p - q) - \frac{\cos. p^5}{\cos. (p - q)^2}\right) + \frac{k^2}{4} \times \left(1 - \frac{\cos. p^4}{\cos. (p - q)^4}\right)\right].$$

De même, en nommant M'', M''', etc., M^λ respectivement, les momens des impulsions contre

* On voit qu'au lieu d'écrire $(\cos. p)^2$, $(\cos. m)^2$, etc., j'écris simplement $\cos. p^2$, $\cos. m^2$, etc. pour abréger et pour éviter la multiplicité des parenthèses

les parties GV'', HV''', etc., et contre une partie indéterminée, on aura les équations,

$$M'' = N\Big[\frac{\cos.(p-2q)^2 - \cos.(p-q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\Big(\cos.(p-2q) - \frac{\cos.(p-q)^3}{\cos.(p-2q)^2}\Big) + \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{\cos.(p-q)^4}{\cos.(p-2q)^4}\Big)\Big],$$

$$M''' = N\Big[\frac{\cos.(p-3q)^2 - \cos.(p-2q)^2}{2} - \frac{2k}{3}\Big(\cos.(p-3q) - \frac{\cos.(p-2q)^3}{\cos.(p-3q)^2}\Big) + \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{\cos.(p-2q)^4}{\cos.(p-3q)^4}\Big)\Big].$$

. . . .

$$M^{\lambda} = N\Big[\frac{\cos.(p-\theta q)^2 - \cos.[p-(\theta-1)q]^2}{2} - \frac{2k}{3}\Big(\cos.(p-\theta q) - \frac{\cos.[p-(\theta-1)q]^3}{\cos.(p-\theta q)^2}\Big) + \frac{k^2}{4}\Big(1 - \frac{\cos.[p-(\theta-1)q]^4}{\cos.(p-\theta q)^4}\Big)\Big];$$

le nombre entier $\theta + 1$ exprimant le nombre des aîles choquées.

V. Donc, si pour abréger l'expression, on prend,

$$S = \frac{M + M' + M''' + \ldots\ldots + M^{\lambda}}{N}$$

et qu'on efface les termes qui se détruisent, on aura

$$S = \frac{\cos.\,(p-\theta q)^2 - \cos.\,m^2.}{2}$$

$$-\frac{2k}{3}\times\left\{\begin{array}{l}\cos.p - \dfrac{\cos.\,m^3}{\cos.\,p^2}\\ +\cos.(p-q) - \dfrac{\cos.\,p^3}{\cos.\,(p-q)^2}\\ +\cos.(p-2q) - \dfrac{\cos.\,(p-q)^3}{\cos.\,(p-2q)^2}\\ +\cos.(p-3q) - \dfrac{\cos.\,(p-2q)^3}{\cos.\,(p-3q)^2}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +\cos.(p-\theta q) - \dfrac{\cos.\,[p-(\theta-1)q]^3}{\cos.\,(p-\theta q)^2}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k^2}{4}\times\left\{\begin{array}{l}1 - \dfrac{\cos.\,m^4}{\cos.\,p^4}\\ +1 - \dfrac{\cos.\,p^4}{\cos.\,(p-q)^4}\\ +1 - \dfrac{\cos.\,(p-q)^4}{\cos.\,(p-2q)^4}\\ +1 - \dfrac{\cos.\,(p-2q)^4}{\cos.\,(p-3q)^4}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ +1 - \dfrac{\cos.\,[p-(\theta-1)q]^4}{\cos.\,(p-\theta q)^4}\end{array}\right\}$$

formule qui donne pour un instant le moment total de l'impulsion de l'eau, quel que soit le nombre des ailes. Il est clair que S varie, à mesure que (tout restant d'ailleurs le même) l'angle p varie, ou que la roue en tournant, prend différentes positions.

VI. Qu'outre les dénominations précédentes, on

appelle encore Π le poids variable auquel le choc de l'eau peut faire équilibre à chaque instant; c son bras de lévier; dt l'élément du temps; dy le petit arc décrit, pendant l'instant dt, par un point de la circonférence $SBDK$: on aura, $\Pi \times c = N.S$, et $\Pi \times c \times dt = N.S\,dt$. Mais $dt = \frac{dy}{u} = -\frac{a\,dp}{u}$; (j'écris $-dp$, parce que t augmentant, p diminue). On aura donc, $\Pi \times c \times dt = -\frac{aN.S\,dp}{u}$, et $c\int \Pi\,dt = \frac{aN}{u}\int -S\,dp$.

VII. Ayant substitué à la place de S sa valeur trouvée (N°. V), on aura dans le second membre de l'équation différentes sortes de termes. Je mets à part dans les calculs suivans, les coëfficiens constans. D'abord le terme $dp\,[\cos.(p-\theta q)^2 - \cos.m^2]$ s'intègre facilement; car il devient

$$\frac{dp}{2} + \frac{dp\cos.(2p-2\theta q)}{2} - dp\cos.m^2,$$ dont l'intégrale est

$$\frac{p}{2} + \frac{\sin.(2p-2\theta q)}{4} - p\cos.m^2.$$

L'intégrale de $dp\cos.p$ est $\sin.p$; celle de $dp\cos.(p-q)$ est $\sin.(p-q)$; celle de $dp\cos.(p-2q)$ est $\sin.(p-2q)$. Ainsi de suite pour les termes de cette espèce.

La seule difficulté est d'intégrer les termes $\frac{dp\cos.m^6}{\cos.p^2}$, $\frac{dp\cos.p^3}{\cos(p-q)^2}$, $\frac{dp\cos.(p-q)^3}{\cos.(p-2q)^2}$, etc.

ainsi que les termes $\frac{dp\cos.m^4}{\cos.p^4}$, $\frac{dp\cos.p^4}{\cos.(p-q)^4}$, $\frac{dp\cos.(p-q)^4}{\cos.(p-2q)^4}$, etc. Voici la manière de faire ces intégrations.

1°. Il est aisé d'intégrer $\frac{dp}{\cos.p^2}$; car en faisant $\cos p = \frac{1}{z}$, on a $\frac{dp}{\cos.p^2} = \frac{z\,dz}{\sqrt{(zz-1)}}$, dont l'intégrale est $\sqrt{(zz-1)} = \frac{\sin.p}{\cos.p}$.

2°. Pour intégrer $\frac{dp\cos.p^3}{\cos.(p-q)^2}$, on observera que $\cos.p = \cos.[(p-q)+q] = \cos.(p-q).\cos.q - \sin.(p-q).\sin.q$, et par conséquent $\frac{dp\cos.p^3}{\cos.(p-q)^2} = dp\cos.(p-q)\cos.q^3 - 3\,dp\sin.(p-q)\sin.q.\cos.q^2 + \frac{3\,dp\sin.(p-q)^2\sin.q^2\cos.q}{\cos.(p-q)} - \frac{dp\sin.(p-q)^3\sin.q^3}{\cos.(p-q)^2} = \cos.q^3.dp\cos.(p-q) - 3\sin.q.\cos.q^2.dp\sin.(p-q) + 3\sin.q^2\cos.q.\frac{dp}{\cos.(p-q)} - 3\sin.q^2\cos.q.dp\cos.(p-q) - \sin.q^3\frac{dp\sin.(p-q)}{\cos.(p-q)^2} + \sin.q^3.dp\sin.(p-q)$. Or, $\int dp\cos.(p-q) = \sin.(p-q)$; $\int dp\sin.(p-q) = -\cos.(p-q)$. Le terme $\frac{dp}{\cos.(p-q)}$ s'intègre en faisant $\cos.(p-q) = \frac{1}{s}$;

ce qui donne $dp = \frac{-d\left(\frac{1}{s}\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{1}{s}\right)^2\right]}}$

$= \frac{ds}{s\sqrt{(ss-1)}}, \frac{dp}{\cos.(p-q)} = \frac{ds}{\sqrt{(ss-1)}}$, dont l'intégrale est L. $[s + \sqrt{(ss-1)}]$ $= \text{L.} \left(\frac{1+\sin.(p-q)}{\cos.(p-q)}\right)$.

Le terme $\frac{dp \sin.(p-q)}{\cos.(p-q)^2}$ est la même chose que $\frac{-d.\cos.(p-q)}{\cos.(p-q)^2}$; et il a par conséquent pour intégrale $\frac{1}{\cos(p-q)}$. Ainsi l'intégrale entière de $\frac{dp \cos. p^3}{\cos.(p-q)^2}$ est $\cos. q^3 \sin.(p-q)$ $+ 3 \sin. q \cos. q^2 \cos.(p-q) + 3 \sin. q^2 \cos. q$ $\times \text{L.} \left(\frac{1+\sin.(p-q)}{\cos.(p-q)}\right) - 3 \sin. q^2 \cos. q \sin.(p$ $-q) - \frac{\sin. q^3}{\cos.(p-q)} - \sin. q^3 \cos.(p-q)$.

De même, en observant que $\cos.(p-q) = \cos.[(p-2q)+q] = \cos.(p-2q)\cos. q$ $-\sin.(p-2q)\sin. q$, on trouvera que l'intégrale de $\frac{dp \cos.(p-q)^3}{\cos.(p-2q)^2}$ est $\cos. q^3 \sin.(p-2q)$ $+ 3 \sin. q \cos. q^2 \cos.(p-2q) + 3 \sin. q^2$ $\cos. q . \text{L.} \left(\frac{1+\sin.(p-2q)}{\cos.(p-2q)}\right) - 3 \sin. q^2 \cos. q$ $\sin.(p-2q) - \frac{\sin. q^3}{\cos.(p-2q)} - \sin. q^3.\cos.(p-2q)$.

On intégrera par la même méthode les quantités analogues $\frac{dp \cos.(p-2q)^3}{\cos.(p-3q)^2}$, $\frac{dp \cos.(p-3q)^5}{\cos.(p-4q)^2}$, etc.

3°. Pour intégrer $\frac{dp}{\cos. p^4}$, on fera $\cos. p = \frac{1}{\sqrt{(1+zz)}}$; et on aura $\frac{dp}{\cos. p^4} = dz + z^2 dz$, dont l'intégrale est $z + \frac{z^3}{3} = \frac{\sin. p}{\cos. p} + \frac{\sin. p^3}{3 \cos. p^3}$.

4°. Pour intégrer $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4}$, on observera, comme tout-à-l'heure, que $\cos. p = \cos. [(p-q) + q] = \cos. (p-q) \cos. q - \sin. (p-q) . \sin. q$; et que par conséquent $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4} = dp \cos. q^4 - 4 \cos. q^3 \sin. q \times \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} + 6 \cos. q^2 \sin. q^2 \times \frac{dp \sin. (p-q)^2}{\cos. (p-q)^2} - 4 \cos. q \sin. q^3 \times \frac{dp \sin. (p-q)^3}{\cos. (p-q)^3} + \sin. q^4 \times \frac{dp \sin. (p-q)^4}{\cos. (p-q)^4} = dp (\cos. q^4 - 6 \cos. q^2 \sin. q^2 + \sin. q^4) - (4 \cos. q^3 \sin. q - 4 \cos. q \sin. q^3) \times \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} + (6 \cos. q^2 \sin. q^2 - 2 \sin. q^4) \times \frac{dp}{\cos. (p-q)^2} - 4 \cos. q \sin. q^3 \times \frac{dp \sin. (p-q)}{\cos. (p-q)^3} + \sin. q^4 \times \frac{dp}{\cos. (p-q)^4}$. Les différens termes de cette quantité s'intègrent par des méthodes et des transformations analogues aux précédentes; et on trouve

que l'intégrale entière de $\frac{dp \cos. p^4}{\cos. (p-q)^4}$ est p ($\cos. q^4 - 6 \cos. q^2 \sin. q^2 + \sin. q^4$) + ($4 \cos. q^3 \sin. q - 4 \cos. q \sin. q^3$). L. $\cos. (p-q)$ + ($6 \cos. q^2 \sin. q^2 - \sin. q^4$) $\frac{\sin. (p-q)}{\cos. (p-q)} - \frac{2 \cos. q \sin. q^3}{\cos. (p-q)^2} + \frac{\sin. q^4 \sin. (p-q)^3}{3 \cos. (p-q)^3}$.

Enfin les quantités $\frac{dp \cos. (p-q)^4}{\cos. (p-2q)^4}$, $\frac{dp \cos. (p-2q)^4}{\cos. (p-3q)^4}$, etc. s'intégreront de la même manière.

VIII. Tous ces calculs étant achevés, et prenant l'intégrale $\int -S dp$ de manière qu'elle s'évanouisse lorsque $p=m$, et reçoive sa valeur complète lorsque $p=m-q$, on trouvera différentes suites de termes, telles que d'une suite à l'autre les termes se détruisent en partie. Après avoir donc effacé tous ces termes, l'équation $c \int \Pi \, dt = \frac{aN}{u} \int -S dp$ devient,

(B) $c \int \Pi \, dt = \frac{aN}{u} \Big[\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2} \right) q + \frac{1}{8}$ $[\sin. (2m - 2\theta q) - \sin. (2m - 2(\theta+1)q)]$ $+ \frac{2k \cos. m^3}{3} \left(\frac{\sin. m}{\cos. m} - \frac{\sin. (m-q)}{\cos. (m-q)} \right) - \frac{2k}{3}$ $[\sin. m - \sin. (m - (\theta+1)q)] + \frac{2k}{3}$ ($\cos. q^3 - 3 \sin. q^2 \cos. q$) $[\sin. (m-q) - \sin. (m - (\theta+1)q)] + \frac{2k}{3}$ ($3 \sin. q \cos. q^2 - \sin. q^3$) [cos.

$$(m-q) - \cos.(m-(\theta+1)q)] - \frac{2k\sin.q^5}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\cos.(m-q)} - \frac{1}{\cos.[m-(\theta+1)q]}\right) + 2k\sin.q^2$$

$$\cos.q \times \mathrm{L}.\left(\frac{[1+\sin.(m-q)]\cos.(m-(\theta+1)q)}{\cos.(m-q)[1+\sin.(m-(\theta+1)q)]}\right)$$

$$+\frac{k^2 q}{4}[\theta+1-\theta(\sin.q^4+\cos.q^4-6\cos.q^2$$

$$\sin.q^2)] - \frac{k^2\cos.m^3}{4}\left(\frac{\sin.m}{\cos.m}+\frac{\sin.m^3}{3\cos.m^3}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin.(m-q)}{\cos.(m-q)} - \frac{\sin.(m-q)^3}{3\cos.(m-q)^3}\right) - k^2(\cos.q^3$$

$$\sin.q - \cos.q\sin.q^3).\ \mathrm{L}.\ \frac{\cos.(m-q)}{\cos.(m-(\theta+1)q)}$$

$$-\frac{k^2}{4}(6\cos.q^2\sin.q^2 - \sin.q^4)\left(\frac{\sin.(m-q)}{\cos.(m-q)}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin.(m-(\theta+1)q)}{\cos.(m-(\theta+1)q)}\right) + \frac{k^2\cos.q\sin.q^3}{2}$$

$$\times\left(\frac{1}{\cos.(m-q)^2} - \frac{1}{\cos.(m-(\theta+1)q)^2}\right) - \frac{k^2}{12}.$$

$$\sin.q^4\left(\frac{\sin.(m-q)^3}{\cos.(m-q)^3} - \frac{\sin.[m-(\theta+1)q]^3}{\cos.[m-(\theta+1)q]^3}\right)\Big].$$

IX. Dans cette formule, $\int \Pi\, dt$ représente le poids auquel le choc de l'eau peut faire équilibre pendant le temps t que la roue emploie à parcourir l'angle q. Supposons $\frac{\int \Pi\, dt}{t} = \Pi'$, Π' étant simplement un poids, et considérons que $t = \frac{aq}{[illegible]}$. De plus, imaginons qu'au moment où la première aile Ee entre dans l'eau, l'aile AB soit placée dans

la verticale; ce qui donne $m = (\theta + 1)q$. En divisant le premier membre de l'équation (B) par t, le second par $\frac{aq}{u}$, et faisant $m = (\theta + 1)q$; on trouvera l'équation,

$$\text{(C)}\quad \Pi' \times c = \frac{N}{q}\Big[\Big(\tfrac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2}\Big)q + \frac{\sin. 2q}{8}$$
$$+ \frac{2k\cos. m^3}{3}\Big(\frac{\sin. m}{\cos. m} - \frac{\sin. (m-q)}{\cos. (m-q)}\Big)$$
$$- \frac{2k\sin. m}{3} + \frac{2k}{3}(\cos. q^3 - 3\sin. q^2\cos. q)$$
$$\sin. (m-q) + \frac{2k}{3}(3\sin. q\cos. q^2 - \sin. q^3)$$
$$[\cos. (m-q) - 1] - \frac{2k\sin. q^3[1-\cos. (m-q)]}{3\cos. [m-q]}$$
$$+ 2k\sin. q^2\cos. q\,.\,\mathrm{L}.\frac{1+\sin. [m-q]}{\cos. [m-q]} + \frac{k^2 q}{4}\times$$
$$[\theta + 1 - \theta(\sin. q^4 + \cos. q^4 - 6\cos. q^2\sin. q^2)]$$
$$- \frac{k^2\cos. m^4}{4}\Big(\frac{\sin. m}{\cos. m} + \frac{\sin. m^3}{3\cos. m^3} - \frac{\sin. [m-q]}{\cos. [m-q]}$$
$$- \frac{\sin. [m-q]^3}{3\cos. [m-q]^3}\Big) - k^2\times(\cos. q^3\sin. q - \cos. q$$
$$\sin. q^3)\,.\,\mathrm{L}.\cos. (m-q) - \frac{k^2}{4}(6\cos. q^2\sin. q^2 -$$
$$\sin. q^4)\frac{\sin. [m-q]}{\cos. [m-q]} + \frac{k^2\cos. q\sin. q^3\sin. [m-q]^2}{2\cos. [m-q]^2}$$
$$- \frac{k^2\sin. q^4\sin. [m-q]^3}{12\cos. [m-q]^3}\Big].$$

400. *Corollaire.* Pour faire une application fort simple de cette formule, supposons que la roue tourne avec une vitesse qu'on puisse regarder com-

me infiniment petite par rapport à celle du fluide. On aura en conséquence $k = 0$, et l'équation (C) deviendra

$$\Pi' \times c = N \left[\frac{1}{4} - \frac{\cos. m^2}{2} \right] + \frac{N \sin. 2q}{8q}.$$

Donc si l'on veut que le moment de l'impulsion de l'eau soit un *maximum*, on aura, en faisant varier q seulement, $2\,q\,d\,q \cos.\,2\,q - d\,q \sin.\,2\,q = 0$, ou bien, $2\,q \sqrt{[1 - (\sin 2\,q)^2]} - \sin.\,2\,q = 0$; équation à laquelle on satisfait en supposant $q = 0$. D'où il suit que le nombre des aubes doit être infini, comme on l'a trouvé dans l'article 388.

Nous avons déjà remarqué que cette conclusion ne doit pas être admise en rigueur. L'expérience fait voir qu'après avoir augmenté le nombre des aubes jusqu'à un certain point, on ne gagne plus guère à l'augmenter davantage; sans compter les autres inconvéniens qu'un trop grand nombre d'aubes peut occasionner.

401. *Remarque*. I. Il n'est pas facile de trouver directement, par notre formule générale, le nombre le plus avantageux d'aubes pour une roue qui tourne avec une vitesse finie et comparable à celle du fluide, parce que l'équation du *maximum* est extrêment composée et presque intraitable; mais on peut parvenir au même but d'une manière indirecte, qui consiste à chercher, par la même formule, les momens d'impulsion pour différens nombres d'aubes, et à choisir parmi tous ces nombres

celui qui donne le plus grand moment. On sent par l'analogie des choses et par la loi de continuité, qu'à mesure que la roue tourne plus lentement, il lui faut un plus grand nombre d'aubes.

402. *Remarque II.* Avant que de fixer dans la pratique le nombre des aubes d'une roue, il faut faire encore une observation essentielle. Les aubes AB, Oo, Pp, Qq, etc., qui sont placées en-delà de la verticale CI, tendent à pousser le fluide, qui a perdu par le choc une partie considérable de la vîtesse qu'il avoit au-devant de la roue. Par conséquent, s'il ne lui reste plus assez de vîtesse pour se soustraire au choc des aubes dont on vient de parler, il en résultera une perte de mouvement dans la machine. Le moment d'impulsion des mêmes aubes contre le fluide, est exprimé par une quantité analogue à celle des N.os VIII et IX de l'article 399. On voit donc que dans ce cas les mêmes moyens qui augmentent le moment d'impulsion du fluide antérieur à la roue, augmentent la résistance du fluide postérieur. Alors il ne faut pas trop multiplier le nombre des aubes. C'est ce qu'on pratique avec raison dans les roues placées sur des rivières. Souvent même on diminue trop le nombre des aubes. Les roues qui se meuvent dans des coursiers demandent un assez grand nombre d'aubes, principalement lorsqu'on a l'attention, comme cela se pratique d'ordinaire, de donner un peu en-delà de la verticale CI une chute à l'eau pour lui faciliter le

moyen de s'échapper, et de ne point gêner le mouvement de la roue.

403. Problème II. *Etant donné le nombre des aubes de la roue, trouver la vitesse* u *avec laquelle la circonférence* SBDK *doit tourner, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Ayant multiplié le premier membre de l'équation (C) par v, vitesse du fardeau Π qui, par sa quantité de mouvement représente l'effet de la machine; et le second par $\frac{cu}{a}$ quantité égale à v, et de plus ayant chassé k par le moyen de sa valeur $\frac{u}{V}$; on aura une équation de cette forme,

$$\Pi' v = A u + B u^2 + C u^3,$$

A, B, C étant des coëfficiens constans et donnés, mais qui sont différens, selon que le nombre des aubes est plus ou moins grand. Donc pour que l'effet de la machine devienne un *maximum*, il faut que l'on ait

$$A\,du + 2\,B\,u\,du + 3\,Cu^2\,du = 0;$$

et par conséquent,

$$u = \frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 3A \cdot C)}}{3\,C}.$$

CHAPITRE XVI.

Des Roues horizontales mues par le choc de l'eau.

404. Si dans les deux chapitres précédens, au lieu de regarder la roue comme verticale, on supposoit qu'elle fût horizontale et conduite par un courant horizontal qui pût frapper librement ses aubes d'un seul côté du centre, les résultats seroient toujours les mêmes, mais on sent qu'une telle disposition a plusieurs inconvéniens qui ne permettent guère de l'employer. Ordinairement la roue, toujours supposée horizontale, est conduite par un courant incliné, qui tombant d'une certaine hauteur, vient frapper successivement ses aubes; et pour que le choc se fasse avec avantage, les aubes, en même temps qu'elles sont dirigées au centre de la roue, ont une certaine inclinaison par rapport à son plan. Telle est la roue $BHKL$ (*Fig.* 61), dont le plan est horizontal, et l'arbre CD est par conséquent vertical. Chaque aube OO, dirigée au centre C, est inclinée à l'horizon, et reçoit le choc d'un courant d'eau PQM, au moment que sa ligne du milieu AB se trouve dans la perpendiculaire CQ menée du centre C à la direction PQ du courant. Les deux angles PQe, PQf sont les angles de suite, formés par le plan de l'aile OO avec la direction du fluide.

fluide. Le poids Π attaché à l'extrémité d'une corde qui va s'envelopper autour de l'arbre CD, représente, par sa quantité de mouvement ascensionnel, l'effet de la machine.

Je considérerai toujours, pour abréger les calculs, chaque aube comme un petit rectangle dont tous les points peuvent être censés avoir la même vîtesse de rotation que le point Q, centre d'impulsion du fluide.

405. On voit assez qu'il est à propos de donner un grand nombre d'aubes à ces sortes de roues, afin que les chocs du fluide se succèdent les uns aux autres sans interruption. Car la pesanteur du fardeau Π que la roue est censée élever, travaille continuellement en sens contraire; et les coups que cette force donne doivent être contre-balancés par ceux du fluide. Il faut éviter néanmoins de multiplier les aubes au point de rendre la roue trop massive.

406. Problême I. *Déterminer en général l'effet de la roue horizontale* BHKL, *mue par le courant* PQM *qui vient frapper ses aubes* OO?

Soient (*Fig.* 62), ef le plan de l'aube choquée; PQM la direction du fluide; QM l'expression de sa vîtesse; QF celle de la vîtesse horizontale avec laquelle le point Q de la roue ou de l'aube tourne uniformément à l'instant du choc. Je décompose la vîtesse QM en deux autres QF, QG, dont la première est la même que celle du point Q de la roue, et doit être négligée; la seconde, la seule à laquelle

il faille avoir égard, produit le même effet que si l'aube ef étant en repos, le fluide la frappoit avec cette vitesse QG. Ainsi, en nommant n le coëfficient de la percussion ; B la surface de l'aube choqué ef; R le rayon ou sinus total ; la percussion qui résultera au point Q, perpendiculairement à ef, sera exprimée par $\frac{n \times B \times (QG)^2 \times (\sin. GQe)^2}{R^2}$.

Représentons cette force par QR perpendiculaire à ef, et décomposons-la en deux autres forces QS, QT, l'une horizontale, l'autre verticale : il est clair que la force verticale QT est détruite par le plan de la roue qui conserve toujours la position horizontale; et que la force horizontale QS est la seule qui à chaque instant pousse l'aube et contre-balance le poids Π. Or, Force $QS =$ Force $QR \times \frac{\sin. RQT}{R}$.

Donc, en substituant pour Force QR, sa valeur que nous avons trouvée ; et observant que si l'on prolonge FQ vers Z, les deux angles RQT, eQZ sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun; le moment de la force QS, par rapport au centre C de la roue (*Fig.* 61), sera $n \times B \times (QG)^2 \times \frac{(\sin. GQe)^2 \times (\sin. eQZ) \times CQ)}{R^3}$;

moment qui doit être égal à celui Πc du poids Π, c étant le bras de levier de ce poids.

Nommons a le rayon CQ de la roue ; u sa vîtesse horizontale QF; v la vitesse ascensionnelle du

poids Π : nous aurons, en mettant pour c sa valeur $\frac{a v}{u}$,

$$\Pi v = \frac{n \times B \times (QG)^2 \times (\text{sin. } GQe)^2 \times (\text{sin. } eQZ) \times u}{R^2}; \quad (A)$$

équation qui remplit l'objet demandé, et qui va nous servir à plusieurs usages.

407. Problême II. *La vîtesse* u *de la roue étant donnée, de même que celle du fluide; trouver la position que l'aube* e f *doit avoir, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Puisque dans le triangle FQM (*Fig.* 62) les côtés QF, QM et l'angle compris FQM sont donnés, la vîtesse FM ou QG est donnée. On connoît aussi l'angle GQZ que fait GQ avec la ligne horizontale FQZ. Il n'y a donc d'indéterminées dans le second membre de l'équation (A) que $(\text{sin. } GQe)^2$ et sin eQZ; et on voit que la question est de partager un angle donné GQZ en deux autres angles GQe, eQZ, tels qu'en multipliant le quarré du sinus de l'un, par le sinus de l'autre, le produit $(\text{sin. } GQe)^2 \times (\text{sin. } eQZ)$ soit un *maximum.*

Soient le sinus total $= 1$; l'angle donné $GQZ = m$; l'angle $GQe = z$, et par conséquent, l'angle $eQZ = m - z$. Nous aurons donc, $(\text{sin. } z)^2 \times \text{sin. } (m - z) =$ *maximum*; ce qui est un problême réel, puisque cette expression s'évanouit également, soit qu'on fasse $z = 0$, ou $z = m$, et qu'entre ces deux limites elle a une valeur finie. Ainsi, $2 \text{ sin. } z \,.\, \text{cos. } z \times \text{sin. } (m - z) \,.\, dz - (\text{sin. } z)^2 \,.\, \text{cos.}$

$(m - z) . dz = 0$. La valeur $\sin. z = 0$, répond à une espèce de *minimum*. L'équation du *maximum* est, $2 \cos. z \sin. (m - z) - \sin. z . \cos. (m - z) = 0$; ou, $2 \sin. m . (\cos. z)^2 - 2 \cos. m . \sin. z . \cos. z - \cos. m . \sin. z . \cos. z - \sin. m . (\sin. z)^2 = 0$; ou, $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{\sin. 2 z}{\frac{1}{3} + \cos. 2 z}$ d'où suit cette construction.

Du point Q pour centre, avec le rayon arbitraire $Q X$ pris pour l'unité ou pour le sinus total, décrivez la demi-circonférence $X Y L$, terminée par le diamètre XL, qui tombe sur le côté $G Q$ de l'angle proposé $G Q Z$; prenez $Q K = \frac{Q X}{3}$; menez parallèlement à l'autre côté NZ de l'angle GQZ ou XQY, la droite KI ; tirez le rayon QI, et partagez l'angle $I Q X$ en deux parties égales par le rayon $Q N$: l'aube $e f$ doit tomber sur ce rayon. Car, si des points Y et I vous abaissez sur le diamètre $X L$ les perpendiculaires $Y E$, $I H$, vous aurez (à cause des triangles semblables $Q E Y$, $K H I$), $\frac{Y E}{Q E} = \frac{I H}{K H}$, ou $\frac{\sin. Y Q L}{\cos. Y Q L} = \frac{\sin. I Q L}{\cos. I Q L - \frac{Q L}{3}}$.

Or, l'angle $Y Q L$ étant le supplément de l'angle $Y Q X$ ou de l'angle m, on a $\sin. Y Q L = \sin. m$; $\cos. Y Q L = - \cos. m$; $\frac{\sin. Y Q L}{\cos. Y Q L} =$

$-\frac{\sin. m}{\cos. m}$; et l'angle IQL étant le supplément de l'angle IQX que je nomme y, on a $\sin. IQL = \sin. y$; $\cos. IQL = -\cos. y$;

$$\frac{\sin. IQL}{\cos. IQL - \frac{QL}{3}} = \frac{-\sin. y}{\frac{1}{3} + \cos. y}.$$

Donc, on aura $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{\sin. y}{\frac{1}{3} + \cos. y}$; et par conséquent, en faisant l'angle $z = \frac{y}{2}$, ou $2z = y$, on aura $\frac{\sin. m}{\cos. m} = \frac{\sin. 2z}{\frac{1}{3} + \cos. 2z}$; ce qui exprime la condition du *maximum*.

408. *Remarque.* Nous remarquerons en passant, que la même méthode peut servir à déterminer l'angle le plus avantageux que les ailes d'un moulin à vent doivent faire avec l'axe, en considérant ces ailes comme des rectangles infiniment étroits, posés obliquement et alternativement en sens contraire tout autour de l'arbre, de telle manière que l'impulsion horizontale du vent puisse se décomposer en deux forces, l'une parallèle à l'arbre, qui est détruite; l'autre, située dans un plan perpendiculaire à l'arbre, laquelle fait tourner la machine. Comme ce problême demanderoit de longues discussions, pour être traité avec exactitude; je renvoie, sur ce sujet, au *Traité des Fluxions* de Maclaurin; à celui des *Fluides* de d'Alembert, et au tome V de ses *Opusules Mathématiques*; sur-

tout à un excellent Mémoire d'Euler (*Acad. de Pétersbourg*, *an.* 1752.)

409. Problème III. *La vîtesse du fluide et la position de l'aile* ef *étant données : trouver la vîtesse horizontale* u *que la roue doit avoir, pour que l'effet de la machine soit un* maximum ?

On voit qu'ici tout est donné dans le second membre de l'équation (A), à l'exception des quantités QG, sin. GQe, et u. Il s'agit donc de faire en sorte que le produit $(QG)^2 \times (\text{sin. } GQe)^2 \times u$ soit un *maximum*.

Pour cela, j'observe d'abord que la vîtesse QF, variable en quantité, conservant toujours la même direction, tous les points G sont placés sur la droite horizontale Gm, qui rencontre en m le prolongement de l'aube fe. Il est clair que dans le triangle QMm, tout est donné, puisque l'on connoît le côté QM qui exprime la vîtesse du fluide, et les deux angles MQm, QMm. Menons, du point G, la perpendiculaire Gh sur Qm; et nommons 1 le sinus total : on aura, sin. $GQe = \frac{Gh}{QG}$. Donc, au lieu du produit $(QG)^2 \times (\text{sin. } GQe)^2 \times u$, nous aurons, $(Gh)^2 \times GM = maximum$; et comme la ligne Gh est en rapport constant avec Gm, il s'ensuit que $(Gh)^2 \times GM$ sera un *maximum*, lorsque $(Gm)^2 \times GM$ en sera un. Or, pour que ce dernier cas arrive, il faut que MG soit le tiers de Mm. D'où suit cette construction.

Prenez sur la ligne donnée Mm la partie MG

$= \frac{Mm}{3}$; menez GQ et achevez le parallélogramme $QGMF$: le côté QF exprime la vitesse que le point Q doit avoir. Connoissant cette vitesse, on la substituera dans l'équation (A), et on aura le plus grand effet Πv de la machine.

410. Problême IV. *La vitesse du courant étant toujours donnée, déterminer tout-à-la-fois l'angle que l'aube* ef *doit former avec le courant, et la vitesse que le point* Q *doit prendre, afin que l'effet de la machine soit un* maximum ?

On voit par l'équation (A) que dans l'hypothèse présente, le produit $(QG)^2 \times (\sin. GQe)^2 \times (\sin. eQZ) \times u$, le seul où il entre des facteurs variables, doit être un *maximum*. Il faut donc, après avoir exprimé tous les facteurs de ce produit par le moyen de l'angle PQf et de la vitesse QF, prendre sa différentielle en faisant varier ces deux quantités, et égaler séparément à zéro les deux parties de cette différentielle.

Soient {
La vitesse donnée QM du fluide..... $= V$,
la vitesse QF du point Q.......... $= u$,
le sinus total........................ $= 1$,
l'angle donné PQZ ou QMm, que fait la direction du courant avec l'horison..................... $= k$,
l'angle PQf ou MQe.......... $= p$.
}

En menant Gg perpendiculaire à QM, on aura $Gg = u \sin. k$; $Mg = u \cos. k$; $Qg = V - u$

cos. k; sin $MQG = \frac{Gg}{QG} = \frac{u \sin. k}{QG}$; cos. $MQG = \frac{Qg}{QG} = \frac{V - u \cos. k}{QG}$. Donc, sin. $GQe = \sin. (MQm - MQG) = \sin. MQm \times \cos. MQG - \cos. MQm . \sin. MQG =$

$$\frac{\sin. p . (V - u \cos. k) - \cos. p . u \sin. k}{QG} =$$

$\frac{V \sin. p - u \sin. (p+k)}{QG}$; et $(QG)^2 \times (\sin. GQe)^2 = [V \sin. p - u \sin. (p+k)]^2$. De plus, sin. $eQZ = \sin. (PQm - PQZ) = \sin. (180^d - p - k) = \sin. (p+k)$. Ainsi, le produit $(QG)^2 \times (\sin. GQe)^2 \times (\sin. eQZ) \times u$, deviendra $[V \sin. p - u \sin. (p+k)]^2 \times [\sin. (p+k)] \times u =$ *Maximum*. Différenciant donc, suivant p et u, et égalant à zéro les deux parties de la différentielle, on aura les deux équations :

(B) $[2 V \cos. p - 2 u \cos. (p+k)] \times [V \sin. p - u \sin (p+k)] \times [\sin. (p+k)] + [V \sin. p - u \sin. (p+k)]^2 \times [\cos. (p+k)] = 0$;

(C) $-2 [V \sin. p - u \sin. (p+k)] \times u \sin. (p+k) + [V \sin. p - u \sin. (p+k)]^2 = 0$.

Cela posé, j'observe que dans l'équation (C), relative à la variation de u, le facteur $[V \sin. p - u \sin. (p+k)]$ doit être rejetté; car, si on prenoit $V \sin. p - u \sin. (p+k) = 0$; ou, $V : u :: \sin. (p+k) : \sin. p$; il est aisé de voir que la direction de la vîtesse QG tomberoit sur l'aube fe, et que par conséquent il n'y auroit point de choc. L'équation

qui donne la vîtesse u la plus avantageuse, est donc, $-2u \sin.(p+k) + V \sin. p - u \sin.(p+k)$; ou bien,

$$u = \frac{V \sin. p}{3 \sin.(p+k)}.$$

Dans l'équation (B), relative à la variation de l'angle p le facteur $V \sin. p - u \sin.(p+k)$ doit être aussi rejetté; car, si l'on supposoit $V \sin. p - u \sin.(p+k) = 0$, et que l'on mît, dans cette équation, pour u sa valeur $\frac{V \sin. p}{3 \sin.(p+k)}$, on trouveroit $V \sin. p - \frac{V \sin. p}{3} = 0$, ce qui est impossible. L'équation pour l'angle p le plus avantageux est donc,

$[2 V \cos. p - 2u \cos.(p+k)] \times [\sin.(p+k)] + V \sin. p . [\cos.(p+k)] - u \sin.(p+k). [\cos.(p+k)] = 0.$

Substituant dans cette formule, pour u sa valeur $\frac{V \sin. p}{3 \sin.(p+k)}$, elle deviendra simplement, $2 \cos. p \times \sin(p+k) = 0$; ce qui donne, ou $\sin.(p+k) = 0$, ou $\cos. p = 0$. La première supposition feroit tomber l'aube ef dans la direction horizontale, et donneroit pour u une valeur infinie, ce qui est impossible. La vraie équation de l'angle p le plus avantageux, est donc, $\cos. p = 0$; d'où nous voyons que cet angle doit être droit, ou que *l'aube* ef *doit être perpendiculaire à la direction* PQ *du courant*.

Substituons maintenant dans l'équation

$$u = \frac{V \sin. p}{3 \sin. (p + k)},$$

pour sin. p sa valeur 1, et pour sin. $(p + k)$ sa valeur cos. k, nous aurons $u = \frac{V}{3 \cos. k}$; c'est-à-dire que, *la vitesse* u *la plus avantageuse doit être égale à la vitesse* V *du fluide, divisée par le triple du cosinus de l'angle que la direction du fluide fait avec l'horizon.*

Connoissant p et u, si l'on substitue leurs valeurs dans l'équation (A), on aura l'expression du plus grand effet de la machine.

CHAPITRE XVII.

Des Roues mues par le poids de l'eau.

411. Les roues mues par le poids de l'eau, dont il est ici question, et qu'on appelle ordinairement *roues à pots* ou *à augets*, sont des roues verticales $AOBD$ (*Fig.* 63 *et* 64), qui reçoivent, dans des espèces de pots ou d'augets $mnnm$ fixés à leurs bords, l'eau d'un canal XZ, et qui tournent en vertu de l'effort que cette eau exerce par sa pesanteur. A cet effort, s'ajoute celui du choc, quand l'eau arrive aux augets avec une vitesse plus grande que celle de la roue. On voit que, selon la manière de recevoir l'eau, la roue peut tourner de gauche

à droite (*Fig.* 63), ou de droite à gauche (*Fig.* 64). Les augets se remplissent vers la partie supérieure de la roue, et ne commencent à se vider que lorsqu'en tournant ils commencent à s'incliner en contre-bas On doit s'attacher à leur donner la forme et les dimensions les plus propres à leur faire conserver l'eau autant qu'il est possible.

Nous estimons toujours l'effet de la machine, par le mouvement ascensionnel d'un poids π, attaché à l'extrémité d'une corde qui, au moyen de la poulie *S* de renvoi, va s'envelopper autour de l'arbre de la roue.

412. Il est évident que, toutes choses d'ailleurs égales, plus l'endroit où l'eau entre dans les augets est proche de l'extrémité supérieure *A* du diamètre vertical *AB*, plus la roue porte d'eau, et plus par conséquent elle a de force pour tourner. Mais on n'est pas toujours maître de lui procurer cet avantage; car il arrive souvent que la hauteur de l'extrémité *Z* du canal affluent, au-dessus du point le plus bas du terrein, est trop petite pour permettre d'y placer une roue d'un diamètre convenable à l'effet qu'elle doit produire. Alors on reçoit l'eau en avant de la roue, comme dans la *Figure* 64; ayant soin de donner aux augets la forme la plus propre à bien tenir l'eau, suivant l'exigence des cas: on augmente leur capacité, en augmentant la largeur de la roue; mais cela a quelquefois l'inconvénient de rendre la roue trop pesante.

413. Que l'eau entre dans les augets par le haut de la roue, ou par le côté; le mouvement s'engendre toujours de la même manière. Il s'accélère par degrés dans les premiers instans; bientôt il parvient à l'uniformité; et alors l'action de l'eau contre-balance à chaque instant celle du poids Π. Or, il peut arriver deux cas: ou la vîtesse de l'eau, à l'endroit où elle entre dans un auget, est égale à la vîtesse de rotation de cet auget, prise à son milieu; ou elle est plus grande. Dans le premier cas, l'eau agit simplement par son poids, pour faire tourner la roue: dans le second, elle agit tout-à-la-fois par son poids et par le choc. Je ne dis rien d'un troisième cas où l'on supposeroit que la vîtesse de rotation de l'auget seroit plus grande que celle de l'eau du canal affluent: car si cela arrivoit, la cause en seroit la pesanteur de l'eau déposée dans l'auget, laquelle force tend effectivement à accélérer le mouvement; mais comme cette eau ne peut être remplacée que par le canal affluent, et que son action est limitée, on sent qu'elle produiroit d'autant moins d'effet sur la machine, qu'elle prendroit pour elle-même plus de vîtesse. On verra en effet bientôt qu'il convient de faire tourner la roue le plus lentement qu'il est possible. Il n'est donc ici question que des deux premiers cas. De plus, il s'agit seulement en ce moment d'évaluer l'effort que l'eau contenue dans les augets, exerce à chaque instant, par la pesanteur, contre le poids Π: l'effet du choc, quand il a lieu, s'évalue par les principes du *Chap. XIII.*

414. Supposons donc que la roue tourne avec une vîtesse uniforme. Quelle que soit cette vîtesse, la pesanteur de l'eau contenue dans les augets, agit de la même manière que si la roue étoit en repos. D'un autre côté, il est évident qu'on peut toujours ramener cet effort de l'eau, à celui d'une portion de couronne d'eau $GghH$ (*Fig.* 65), continuellement inhérente à la roue, sur une étendue donnée GOH, et sur une épaisseur Gg aussi donnée. Les dimensions de cette portion de couronne se trouvent par la forme des augets, et par la quantité d'eau qu'ils contiennent. Ordinairement, l'épaisseur Gg peut être regardée comme infiniment petite par rapport au rayon CG de la roue; et la vîtesse de rotation du point G ou de tout autre point de la circonférence $AOBD$, comme celle de l'auget. Si on trouvoit cette supposition trop libre, on approcheroit davantage de la vérité, en prenant, au lieu de l'arc GOH, l'arc moyen de la portion de couronne; et au lieu du rayon CG, le rayon moyen. Mais nous négligeons ici cette grande exactitude, et nous nous proposons ainsi la question.

415. Problême I. *Déterminer le moment de l'effort que la portion d'eau* GghH, *dont l'épaisseur* Gg *est infiniment petite par rapport au rayon* CG, *exerce à chaque instant pour accélérer le mouvement de la roue?*

Du centre C, soient menés les deux rayons infiniment voisins CMN, Cmn, lesquels déterminent la quantité élémentaire d'eau $MNnm$; et des points

G, H, M, m, soient menées, au diamètre vertical AB, les perpendiculaires GF, HV, MP, mp. Soit encore abaissée la verticale Mrz, qui rencontre en r l'ordonnée mp, et en z le rayon horizontal CO. La portion d'eau $MNnm$ peut être représentée par $Mm \times MN$; et son moment par rapport au centre C, par $Mm \times MN \times Cz$, ou $Mm \times MN \times MP$. Or, à cause des triangles semblables Mrm, MPC, on a, $Mm : CM :: Mr$ ou $Pp : MP$; et par conséquent $Mm \times MP = Pp \times CM$. Donc, $Mm \times MN \times MP = MN \times Pp \times CM$; et $\int Mm \times MN \times MP = \int MN \times Pp \times CM = MN \times CM \times \int Pp = MN \times CM \times FV$: expression du moment de la quantité totale d'eau $GghH$.

Comme dans ce calcul, nous avons fait abstraction de la largeur de la roue, ou de la dimension horizontale des augets; si l'on nomme D cette dimension, la véritable expression du moment de l'eau $GghH$, sera $D \times MN \times FV \times CM$. Pour abréger, au lieu du produit $D \times MN$, qui représente une surface rectangulaire, j'emploierai une simple lettre B.

416. *Corollaire.* Nommons u la vîtesse de rotation du point G; a le rayon CM; v la vîtesse ascensionnelle du poids Π; c le bras de levier de ce poids par rapport au centre de la roue. On aura d'abord, $\Pi \times c = B \times FV \times a$. Substituons dans cette équation pour c sa valeur $\frac{av}{u}$: nous aurons, $\Pi v = B \times FV \times u$.

417. Problème II. *La roue tournant toujours uniformément, et la vîtesse du point* G *étant supposée égale à celle de l'eau du canal, à l'endroit* Gg *où elle passe de ce canal dans les augets : rendre l'effet* Π v *de la machine le plus grand qu'il est possible?*

Je suppose que le canal affluent amène, en tems égaux, des quantités égales d'eau à la roue. Soit RZ une ligne constante de niveau; et RF la hauteur dûe à la vitesse V de l'eau à son entrée Gg dans les augets. On doit ici considérer Gg comme un orifice dont la surface est B, et par lequel passe, dans un temps donné, une quantité donnée d'eau. Supposons que dans une seconde, il passe par B, une quantité d'eau $= Q$; et que les corps graves parcourent quinze pieds pendant la première seconde de leur chute. En nommant H la haureur RF, on aura (224), $Q = 2B\sqrt{15H}$, ou $B = \frac{Q}{2\sqrt{15H}}$;

et par conséquent, $\Pi v = \frac{Q}{2\sqrt{15H}} \times FV \times V$;

ou bien (en nommant g la gravité; k la hauteur dûe à la vîtesse v; et observant que $V^2 = 2gH$, $v^2 = 2gk$), $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$.

Maintenant, tout étant donné dans le second membre de cette équation, excepté la ligne FV qu'on peut faire varier, on voit que pour augmenter l'effet de la machine, il faut augmenter FV. Or, le point V étant supposé fixe, à mesure qu'on aug-

mente VF, on diminue FR, et par conséquent aussi la vîtesse du fluide à l'endroit Gg, ou la vîtesse de rotation du point G. Et il est clair que cette diminution de vîtesse peut avoir lieu, Q demeurant constante, puisqu'on peut augmenter en proportion la surface B, ou le produit $D \times MN$, dont les deux facteurs sont susceptibles de variation. La variation de MN ne peut être que très-petite; mais on est libre d'augmenter D, en augmentant pour cela la largeur de la roue.

Concluons donc que *la circonférence de la roue tournant uniformément, avec une vîtesse égale à celle du fluide à son entrée dans les augets, l'effet de la machine, pour une quantité constante d'eau dépensée, sera d'autant plus grand que la roue tournera avec plus de lenteur.*

418. *Corollaire.* En comparant l'expression $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$ de l'effet de la roue à pots, rendu le plus grand qu'il est possible, avec les expressions que nous avons trouvées (392) pour les plus grands effets des roues à aubes, on jugera quelle est celle qui produit le plus grand effet, pour une égale quantité d'eau dépensée, ou de la roue à pots, ou de la roue à aubes. Car, supposons qu'ici, et dans l'article 392, les quantités d'eau Q dépensées en une seconde soient les mêmes; de plus, en imaginant que la roue $ADBO$ fût ici mue par le choc de l'eau, supposons que ce choc répondît à l'endroit V: la lettre H, qui, dans l'article 392, exprime la hauteur

hauteur dûe à la vîtesse du courant, représentera ici RV. Donc, l'effet de la roue à pots est au plus grand effet de la roue à aubes (I.er Cas), comme $\frac{Q \cdot FV}{2\sqrt{15}}$ est à $\frac{2Q \cdot RV}{27\sqrt{15}}$, ou comme $27\,FV$ est à $4\,RV$; et l'effet de la roue à pots est au plus grand effet de la roue à aubes (II.e Cas) comme $27\,FV$ est à $8\,RV$.

Comme on est maître, et qu'il convient d'augmenter VF (le point V étant fixe), pour augmenter l'effet de la roue à pots, on voit que pour une quantité égale d'eau dépensée, l'effet de la roue à pots est beaucoup plus avantageux que celui de la roue à aubes. Les roues de la première espèce doivent donc être préférées aux autres, toutes les fois que la chose est possible. Mais, il y a beaucoup de cas où elle ne l'est pas; car d'abord, sur les rivières on ne peut employer que des roues à aubes. De plus, pour les coursiers, les roues à pots demandent une grande chute d'eau, qu'on ne peut pas souvent se procurer : alors l'on emploie des aubes que le fluide vient frapper au bas de la roue. Enfin, il y a des occasions où l'on a besoin que la roue tourne très-vîte, et où l'on a d'ailleurs de l'eau en abondance : on remplit cet objet avec une roue à aubes. Comme les roues à pots produisent d'autant plus d'effet qu'elles tournent plus lentement, on ne pourroit en ce cas, employer une roue de cette espèce, qu'en la faisant engréner avec une lanterne, ou avec

une autre roue; ce qui compliqueroit la machine et augmenteroit les frottemens.

419. Problême III. *Le point* G *de la roue tournant toujours uniformément, avec une vîtesse égale à celle du fluide à son entrée* Gg *dans les augets, on suppose maintenant que le niveau* XZ *du réservoir pouvant toujours demeurer le même, au moyen de l'affluence d'une rivière ou d'un ruisseau, qui remplace suffisamment l'eau dépensée par la roue, on soit maître d'augmenter ou de diminuer* Q, *en tirant l'eau du réservoir par un tuyau de diamètre donné, et de longueur variable; et l'on demande l'endroit* Gg *où il faut recevoir l'eau, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Substituons dans l'équation $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q \times FV}{2\sqrt{15}}$, pour Q sa valeur $2\,B\sqrt{15\,H}$, ou $2\,B \,.\, \sqrt{15} \times \sqrt{RF}$; nous aurons $\Pi \sqrt{k} = B \times FV \times \sqrt{RF}$ $=$ *maximum*. Donc, B étant constant, la quantité $[FV]^2 \times RF$ est un *maximum*. La question est donc de diviser la ligne donnée RV, en deux parties, telles que le produit de l'une par le quarré de l'autre, soit un *maximum*. Or, il faut, pour cela, que RF soit le tiers de RV. Ainsi l'équation du plus grand effet de la roue est, $\Pi \sqrt{k} = B \times \frac{2}{3} RV \times \sqrt{\frac{RV}{3}}$: équation au moyen de laquelle on pourra comparer le plus grand effet de cette roue, à celui d'une roue à aubes, qui seroit frappée

au point V, d'où l'eau s'échappe de la roue à pots.

La solution de ce problème peut être utile, lorsqu'ayant une roue toute construite, on veut la faire tourner de la manière la plus avantageuse, par le seul poids de l'eau, et lorsque de plus la hauteur du réservoir étant donnée et constante, on a la faculté de prendre plus ou moins d'eau, selon le besoin.

420. Problème IV. *Supposons que le canal affluent amène toujours, en temps égaux, des quantités égales d'eau à la roue; que cette roue tourne uniformément, mais que la vitesse de rotation du point* G *soit maintenant plus petite que celle de l'eau, à son entrée dans les augets : on demande l'expression générale de l'effet de la machine?*

L'action du poids Π est ici contre-balancée à chaque instant par celle de l'eau contenue dans les augets, et par le choc de l'eau que le canal amène continuellement. Soient V la vitesse de ce courant; u la vitesse de rotation du point G; a le rayon CG; c le bras de levier du poids Π; B la section d'un auget par un plan perpendiculaire à la roue et dirigé à son centre; C la surface contre laquelle s'exerce le choc perpendiculaire du fluide; n le coëfficient de la percussion. On voit (363 et 416), qu'on aura l'équation, $\Pi c = B \times FV \times a + n \cdot C(V - u)^2 \times a$; ou bien (en nommant v la vitesse ascensionnelle du poids Π, et observant que $c = \frac{av}{u}$),

(A) $\Pi v = B \times FV \times u + n\, C(V - u)^2 \cdot u.$

Maintenant, nommons Q la quantité constante d'eau que le canal amène à la roue en une seconde; H, la hauteur FR dûe à la vîtesse de cette eau; K, l'aire de l'orifice par lequel l'eau est censée sortir du canal pour entrer dans les augets; h, la hauteur FT dûe à la vîtesse u; k, la hauteur dûe à la vîtesse v.

Il est évident que la vîtesse u étant moindre que V, K doit être moindre que B; mais que la roue tournant uniformément, et que par conséquent le fluide, depuis le réservoir jusques à l'endroit où il s'échappe de la roue, pouvant être considéré comme une masse continue qui conserve constamment les mêmes dimensions aux mêmes endroits; il s'ensuit (216) que les vîtesses des différentes sections perpendiculaires de ce courant sont entre elles en raison inverse des surfaces de ces mêmes sections. Ainsi, on aura, $B : K :: V : u$; ou, $B . u = K . V$; ou, $B\sqrt{h} = K\sqrt{H}$. Mais $Q = 2K\sqrt{15H}$, ou $K\sqrt{H} = \frac{Q}{2\sqrt{15}}$; donc $B\sqrt{h} = \frac{Q}{2\sqrt{15}}$.

D'un autre côté, pour déterminer le coëfficient n, ou $\frac{F}{AU^2}$ de la percussion, faisons $A = C = K$; $U = V$, et par conséquent, la hauteur dûe à la vîtesse $U = H$; prenons $F = m . K . H$, m étant un coëfficient constant qui vaut 2 à-peu-près (391). En mettant pour K sa valeur $\frac{Q}{2\sqrt{15} . \sqrt{H}}$,

on aura $F = \frac{m \cdot H \times Q}{2\sqrt{15} \cdot \sqrt{H}}$; et $n = \frac{m}{2g \cdot C} \times \frac{Q}{2\sqrt{15} \cdot \sqrt{H}}$.

Par conséquent, l'équation (A) deviendra,

$$\Pi \sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \times \left(FV + \frac{m[\sqrt{H} - \sqrt{h}]^2 \cdot \sqrt{h}}{\sqrt{H}} \right); \quad \text{(B)}$$

ce qui est la formule demandée.

421. Problème V. *Tout étant supposé donné dans la formule* (B), *à l'exception de la hauteur* h *due à la vitesse* u *du point* G, *on demande quelle doit être cette vitesse, pour que l'effet de la machine soit un* maximum?

Dans cette hypothèse, $(\sqrt{H} - \sqrt{h})^2 \cdot \sqrt{h}$ doit être un *maximum;* ce qui donne $\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$, ou $u = \frac{V}{3}$. Substituant cette valeur de $\sqrt{h}$ dans la formule (B), et faisant $m = 2$, on trouvera, $\Pi \sqrt{k} = \frac{Q}{2\sqrt{15}} \times \left(RV - \frac{19RF}{27} \right)$; expression du plus grand effet de la roue.

422. *Carollaire.* On voit par cette expression, 1°. que la roue produit un effet qui augmente à mesure que FR diminue, RV étant donnée, et que par conséquent la roue tourne plus lentement. On obtiendroit le même résultat, si l'on différencioit le second membre de la formule (B), en faisant varier h et H, et qu'on égalât séparément à zéro les deux différentielles. Car la première équa-

tion résultante donne $\sqrt{h} = \frac{\sqrt{H}}{3}$. Substituant cette valeur de $\sqrt{h}$ dans la seconde, on trouvera $H = 0$, et par conséquent aussi $h = 0$, ce qui étant impossible physiquement, fait voir du moins que la roue produit d'autant plus d'effet, qu'elle tourne avec plus de lenteur.

2°. Que le plus grand effet de la roue à pots, est au plus grand effet que produiroit une roue à aubes, sous la chute RV, comme 27 $\left(RV - \frac{19\,RF}{27}\right)$ est à 8 RV, la quantité d'eau Q employée à mouvoir la roue, étant la même dans les deux cas.

CHAPITRE XVIII.

Des Machines mues par la réaction de l'eau.

423. UN vase qui contient de l'eau, étant supposé suspendu verticalement par son centre de gravité, le fluide exerce des pressions perpendiculaires égales sur tous les points d'une même zone, ou section horizontale de ce vase qui conserve toujours la même situation d'équilibre, tant que le fluide est en repos. Mais si l'on fait aux parois une ouverture par où le fluide vienne à s'échapper, alors les parois cessant en cet endroit, la pression contre-

les parois y cesse aussi ; mais l'endroit directement opposé du vase souffre une pression qui n'etant plus contre-balancée, oblige nécessairement le vase à reculer. J'appelle *reaction de l'eau*, cette force qui repousse ainsi le vase ; et je me propose d'expliquer comment elle peut servir de principe moteur à une machine.

424. Soit *ABCDEF* (*Fig*. 66), une roue horizontale, mobile autour d'un axe vertical *O*. A cette roue et à son arbre, sont attachés solidement une suite de tuyaux, tels que *AH*, *EG*, *FH* (*Fig*. 67). Ces tuyaux communiquent par en haut avec un tambour creux *HIHI*, qui tourne avec eux autour de l'arbre ; l'eau est versée d'abord dans ce tambour, par les conduits *NG* qui la tirent du réservoir immobile *IMIM* ; de là, elle passe dans les tuyaux, et s'échappe vers le bas, par les orifices *a*, *b*, *c*, etc., horizontaux ou inclinés en même sens à l'horizon ; d'où résulte contre les tuyaux une réaction, qui fait tourner la roue dans le sens *ABCDEF*. Le mouvement s'accélère par degrés ; il parvient en très-peu de temps à l'uniformité. Je le considère quand il est arrivé à cet état ; et je représente toujours l'effet de la machine, par le mouvement ascensionnel d'un poids Π attaché à une corde, qui va s'envelopper autour de l'arbre *OZ*.

425. Problême I. *Un tuyau* CDFE (Fig. 68), *de figure quelconque, entretenu constamment plein*

d'eau au niveau AD, *tournant uniformément autour de l'axe vertical* AB, *et laissant échapper l'eau par la petite ouverture latérale* l : *on demande la hauteur dûe à la vîtesse de cet écoulement?*

Soit la courbe hMl l'axe du tuyau ; et concevons que le fluide soit partagé en une infinité de tranches égales, perpendiculaires aux élémens Mm de la courbe, lesquelles conservent leur parallélisme pour chaque élément, et changent de direction d'un élément à l'autre. Chaque point M d'une tranche quelconque, est continuellement soumis à l'action de deux forces, qui sont la gravité et la force centrifuge. Ayant mené à l'axe AB, l'horizontale MP; faisons passer par ces deux lignes un plan dans lequel nous prendrons la verticale Mt pour représenter la gravité, et l'horizontale Mq pour représenter la force centrifuge. De ces deux forces, résultera la force composée Mr, représentée par la diagonale du rectangle $Mtrq$. Je mène, suivant l'élément Mm de la courbe hMl, un plan Mmn perpendiculaire au plan APM, de sorte que Mn est la projection orthonogale de Mm sur ce dernier plan : ensuite je tire np parallèle à MP. La force Mr peut être décomposée en deux autres Mi, Mg; l'une dirigée suivant Mn ; l'autre perpendiculaire à Mn. Or, comme le plan $Mgrt$ est perpendiculaire au plan Mmn; la force Mg est perpendiculaire à l'élément Mm, qui est situé dans ce dernier plan, et ne contribue en rien à la vitesse

suivant Mm. De la force Mi, je dérive les deux forces Mf, Mu, la première dirigée suivant Mm, la seule qui tende à accélérer la vîtesse de l'eau dans le tuyau, la seconde perpendiculaire à Mm, qu'il faut négliger.

Soient	l'horizontale donnée Bl	$= b$,
	l'horizontale donnée Ah	$= c$,
	la hauteur donnée AB	$= h$,
	AP	$= x$,
	PM	$= y$,
	pn	$= y + dy$,
	Mm	$= ds$,
	l'aire de l'orifice l	$= K$,
	l'aire de la section supérieure et perpendiculaire GD du tuyau	$= M$,
	l'aire de la section sMz perpendiculaire à Mm	$= X$,
	la vîtesse avec laquelle l'eau sort par l'orifice l	$= u$,
	la hauteur dûe à cette vîtesse	$= r$,
	la vîtesse de l'eau suivant Mm	$= v$,
	la vîtesse absolue de rotation uniforme du point l	$= V$,
	la hauteur dûe cette vîtesse	$= f$,
	le sinus total	$= 1$,
	l'angle mMn	$= \lambda$,
	la gravité	$= g$.

On aura d'abord, Force $Mt = g$. La Force centrifuge du point l ayant, comme on sait, pour expression, le quarré de la vîtesse V, divisé par le rayon Bl, c'est-à-dire $\frac{V^2}{b}$ ou $\frac{2gf}{b}$,

et les forces centrifuges de deux points qui tournent dans le même temps, étant proportionnelles aux rayons des circonférences qu'ils décrivent, on aura, Force $Mq = \frac{2gf}{b} \times \frac{y}{b} = \frac{2gfy}{b^2}$. Donc, Force $Mr = \sqrt{\left(g^2 + \frac{4g^2f^2y^2}{b^4}\right)}$, que je nomme φ, afin d'abréger; Force $Mi = \varphi$ cos. $rMi = \varphi$ cos. $(rMt - iMt) = \varphi$ cos. $rMt \times$ cos. $iMt + \varphi$ sin. $rMt \times$ sin. iMt. Or, cos. $rMt = \frac{g}{\varphi}$; sin. $rMt = \frac{2gfy}{b^2 . \varphi}$; cos. $iMt = \frac{dx}{Mn} = \frac{dx}{ds \text{ cos. } \lambda}$; sin. $iMt = \frac{dy}{ds \text{ cos. } \lambda}$; donc, Force $Mi = \frac{g}{\text{cos. } \lambda} \left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fy\,dy}{b^2\,ds}\right)$; Force $Mf =$ Force $Mi \times$ cos. $\lambda = g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fy\,dy}{b^2\,ds}\right)$.

Maintenant, la vîtesse de la tranche sMz, étant exprimée par v après le temps t écoulé, elle deviendroit, après l'instant suivant dt, $v + g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fy\,dy}{b^2\,ds}\right)dt$, si les tranches n'avoient point d'action les unes sur les autres; mais comme elle devient $v + dv$, on voit, par la méthode de l'article 252, que si les tranches étoient animées de la vîtesse $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fy\,dy}{b^2\,ds}\right)dt - dv$, elles se feroient mutuellement équilibre. D'où il suit que, sur

toute l'étendue de la courbe hMl, on a, $\int ds \left[g \left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fy\,dy}{b^2\,ds} \right) dt - dv \right] = 0$, ou bien, $g\,dt \times \int dx + \frac{gf\,dt}{b^2} \int 2y\,dy - \int ds\,dv = 0$. Or, en prenant toutes les intégrales pour la hauteur entière h, l'intégrale de dx est h; celle de $2y\,dy$ est $b^2 - c^2$; celle de $ds\,dv$, ou de $ds \,.\, d\left(\frac{Ku}{X}\right)$, ou de $\frac{K\,ds[X\,du - u\,dX]}{X^2}$, est $K\,du \int \frac{ds}{X} - Ku \,.\, X\,ds \left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2} \right)$, ou $K\,du \int \frac{ds}{X} - K^2 u^2 \,.\, dt \left(\frac{1}{2M^2} - \frac{1}{2K^2} \right)$, à cause de $dt = \frac{ds}{v} = \frac{X\,ds}{Ku}$. Par conséquent, on aura (en nommant N la quantité donnée $\int \frac{ds}{X}$),

$$g\,dt \left(h + \frac{f(b^2 - c^2)}{b^2} \right) - N \,.\, K \,.\, du - \left(\frac{M^2 - K^2}{2M^2} \right) . u^2\,dt = 0:$$

Équation séparable, et d'où il est facile de tirer la relation entre le temps t et la vîtesse respective u, avec laquelle l'eau sort par l'orifice l; ou entre le temps t et la hauteur r, à cause de $u^2 = 2gr$.

426. *Corollaire I.* On voit en général que la vîtesse u varie d'un instant à l'autre, et que le seul terme qui contient cette variation du dépend de la figure du tuyau. Mais, en intégrant l'équation

précédente, on trouve que si l'orifice K est beaucoup moindre que la section supérieure M du tuyau, la vitesse u devient sensiblement uniforme après les 2 ou 3 premières secondes de l'écoulement; c'est-à-dire, qu'après ce commencement du mouvement, inutile à considérer, il sort, en temps égaux, des quantités égales d'eau, à très-peu de chose prés. Nous ferons donc, dans la suite, $du = 0$; et alors on aura simplement, $g\,dt\left[h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right)\right] - \left(\frac{M^2 - K^2}{2M^2}\right)u^2\,dt = 0$; ou, $h + \frac{f[b^2 - c^2]}{b^2} - \left(\frac{M^2 - K^2}{M^2}\right)r = 0$; ce qui donne,

$$r = \left(h + f\frac{[b^2 - c^2]}{b^2}\right) \times \frac{M^2}{M^2 - K^2}.$$

Mais il ne faudra pas oublier que cette expression emporte que M soit considérablement plus grand que K. La valeur de r, dans cette hypothèse, est indépendante, comme on voit, de la figure du tuyau; mais on doit éviter les tuyaux tortueux, où l'eau coule avec peine, à cause du frottement.

427. *Corollaire II.* La surface de l'eau à l'entrée CD du tuyau, étant supposée horizontale, le premier côté de la courbe hMl est vertical. Or, la vîtesse suivant ce côté est $\frac{Ku}{M}$, tandis que la vîtesse de rotation horizontale uniforme du point h est $\frac{c}{b} \times V$. Donc, la vîtesse vraie de l'eau en h

sera $\sqrt{\left[\frac{K^2 u^2}{M^2} + \frac{c^2 V^2}{b^2}\right]}$, ou $\sqrt{\left[\frac{2grK^2}{M^2} + \frac{2gfc^2}{b^2}\right]}$; et le conduit NG (*Fig.* 67) qui est subordonné à la direction de cette vîtesse, sera conséquemment incliné à l'horizon, sous un angle dont la tangente $= \frac{bKu}{cM.V} = \frac{bK\sqrt{r}}{cM\sqrt{f}}$.

D'un autre côté, comme la pression de l'eau contenue dans le réservoir fixe $IMIM$ doit produire la vîtesse $\sqrt{\left[\frac{2grK^2}{M^2} + \frac{2gfc^2}{b^2}\right]}$ à l'orifice inférieur G du conduit NG, il s'ensuit que la hauteur ZR de cette eau $= \frac{rK^2}{M^2} + \frac{fc^2}{b^2}$.

428. *Corollaire III.* La pression à l'endroit M du tuyau $CDFE$ (*Fig.* 68) étant la somme des forces perdues, $g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}$; si l'on nomme P cette pression, on aura

$$dP = ds\left[g\left(\frac{dx}{ds} + \frac{2fydy}{b^2 ds}\right) - \frac{dv}{dt}\right],$$

ou, $dP = g\,dx + \frac{2gfydy}{b^2} - \frac{ds\,dv}{dt}$;

ou, $dP = g\,dx + \frac{2gfydy}{b^2} - v\,dv$;

et $P = gx + \frac{gf(y^2 - c^2)}{b^2} + \frac{K^2 u^2}{2} \times \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{X^2}\right)$.

429. Problème II. *Déterminer, pour chaque instant, le moment de la force qui fait tourner le tuyau, en supposant que la vîtesse du fluide au sortir de l'orifice* l, *est uniforme de même que la vîtesse de rotation du tuyau?*

Soit menée la ligne horizontale fixe BS; par cette ligne et par la ligne horizontale Bl, qui tourne circulairement autour du point B, je fais passer un plan, lequel est horizontal, comme on voit; et je suppose que du point M tombe sur ce plan la verticale MQ; du point Q, j'abaisse QS perpendiculaire à BS; et je tire QB qui est égale et parallèle à MP. Je garde les dénominations précédentes, et je fais de plus $BS = p$; $SQ = q$; l'angle $QBl = z$; l'angle de rotation uniforme $lBS = \xi$, lequel donne $dd\xi = 0$.

Cela posé, quelle que soit la force accélératrice, qui anime la petite masse d'eau Xds, qui répond à l'élément Mm; cette force peut être décomposée en trois autres forces, dirigées parallèlement aux coordonnées BS, SQ, QM. Je néglige la dernière, comme ne pouvant produire aucun moment relativement à l'axe AB auquel elle est parallèle. Les deux premières, qui ont pour valeur respective, $Xds \times \frac{ddp}{dt^2}$, $Xds \times \frac{ddq}{dt^2}$, peuvent être décomposées chacune en deux autres, l'une dirigée suivant PM, l'autre perpendiculaire à PM. Les deux forces dirigées suivant PM doivent être négligées; celles qui sont perpendiculaires

à PM, produisent la résultante $X\,ds\left[\frac{ddq}{dt^2}\right.$ $\cos.(\xi+z)-\frac{ddp}{dt^2}\sin.(\xi+z)\Big]$, laquelle étant censée pousser horizontalement l'eau dans le sens $l\,k$, occasionne une réaction égale et contraire, qui fait tourner le tuyau dans le sens $k\,l$. Ainsi, le moment de cette réaction élémentaire est $yX\,ds$ $\times\left[\frac{ddp}{dt^2}\sin.(\xi+z)-\frac{ddq}{dt^2}\cos.(\xi+z)\right]$, et par conséquent, l'intégrale de cette quantité sera le moment cherché. Or, $p=y\cos.(\xi+z)$; $q=y\sin.(\xi+z)$; d'où résulte $ddp\times\sin.(\xi+z)-ddq\cos.(\xi+z)=-2\,dy\times(d\xi+dz)-y\,ddz$. De plus, on a les équations, $dt=\frac{b\,d\xi}{V}$, ou $\frac{d\xi}{dt}=\frac{V}{b}$; $dt=\frac{ds}{v}$ $=\frac{X\,ds}{Ku}$; $ds=\frac{Ku\,dt}{X}$; $y\,dz=-mn=$ $-ds\sin.\lambda=-\frac{Ku\,dt}{X}\times\sin.\lambda$, ou $\frac{dz}{dt}$ $=-\frac{Ku\sin.\lambda}{yX}$. Par conséquent le moment élémentaire de la réaction de l'eau deviendra, $-Ku$ $\left[\frac{2Vy\,dy}{b}-Ku\left(\frac{2y\,dy\sin.\lambda}{yX}+y^2\right.\right.$ $\left.\left.d\left(\frac{\sin.\lambda}{yX}\right)\right)\right]$, dont l'intégrale est, $-Ku\left[\frac{Vy^2}{b}\right.$ $\left.-\frac{Kuy^2\sin.\lambda}{yX}\right]+C$. Cette intégrale doit s'évanouir, lorsque $y=c$, $X=M$; et $\sin.\lambda=0$, à cause que le premier côté de la courbe $h\,M\,l$

est supposé vertical; elle doit recevoir sa valeur complète, lorsque $y = b$, $X = K$; et sin. $\lambda = 1$, à cause que l'eau est supposée sortir horizontalement par l'orifice l. Ainsi, le moment demandé est

$$K\,u\left[\frac{Vc^2}{b} - V\,b + u\,b\right], \text{ ou}$$

$$2g \,.\, K\left[b\,r - \left(\frac{b^2 - c^2}{b}\right)\sqrt{f\,r}\right].$$

430. *Corollaire I.* On trouvera le temps d'une révolution entière de la machine, en intégrant l'équation $dt = \frac{b\,d\xi}{V}$, de manière que l'intégrale s'évanouisse, lorsque $\xi = 0$, et reçoive sa valeur complète, lorsque $\xi = 360^d$. Ce temps est donc $\frac{2\,b\,m}{V}$, ou $\frac{2\,b\,m}{\sqrt{2gf}}$, m exprimant le rapport de la circonférence au diamètre.

431. *Corollaire II.* Tous les tuyaux $CDFE$ étant égaux, semblables et semblablement distribués autour de l'axe de la machine, l'expression du moment de la réaction de l'eau pour un tuyau, représentera le moment de la réaction de l'eau contre tous les tuyaux, si l'on suppose que la lettre K, au lieu d'exprimer simplement, comme elle a fait jusqu'ici, l'orifice l d'un tuyau, exprime maintenant la somme de ces orifices pour tous les tuyaux.

Nous attribuerons toujours, dans le reste de ce chapitre, cette même valeur à K. Pareillement, nous entendrons par M la somme de toutes les sections supérieures CD des tuyaux.

432. *Corollaire*

432. *Corollaire III.* Nommons Q la quantité constante d'eau que le réservoir immobile $IMIM$ (*Fig.* 67) fournit, en une seconde, à la somme de tous les tuyaux, qui la versent par les orifices a, b, c, etc.: supposons que la hauteur parcourue par un corps grave, pendant la première seconde de sa chute, soit 15 pieds; et que toutes les mesures linéaires, contenues dans nos formules, soient exprimées en pieds. Nous aurons (224), $Q = 2 K \sqrt{15 r}$; ou $K = \frac{Q}{2\sqrt{15 r}}$. Substituant cette valeur dans le moment total de la réaction de l'eau, il deviendra,

$$\frac{gQ}{\sqrt{15}} \left[b \sqrt{r} - \frac{[b^2 - c^2]}{b} . \sqrt{f} \right].$$

433. Problême III. *Trouver l'expression générale de l'effet de la machine?*

Soit Π la masse ascensionnelle, dont la quantité de mouvement exprime l'effet de la machine. Le produit de cette masse par la gravité g et par son bras de levier que je nomme R, compose le moment $g\,\Pi \times R$, qui devient $g\,\Pi \times \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$, en nommant k la hauteur dûe à la vitesse de Π, et observant qu'on a, $b : R :: \sqrt{f} : \sqrt{k}$, ou $R = \frac{b\sqrt{k}}{\sqrt{f}}$. Égalons ce moment à celui de la réaction de l'eau que nous venons de trouver; nous aurons pour l'expression cherchée:

$$\text{(A)} \quad \Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}} \left[\sqrt{fr} - \frac{(b^2 - c^2)}{b^2} f \right].$$

434. Problème IV. *Déterminer la hauteur f due à la vitesse de rotation uniforme de la machine, pourque l'effet de cette machine soit un* maximum?

Soient, outre les dénominations précédentes qui subsistent toujours, l la hauteur constante de l'eau dans le réservoir fixe $IMIM$ au-dessus des orifices inférieurs G des conduits NG; G la somme des aires de ces orifices; H la hauteur totale ZO de la machine, ou la somme des hauteurs du réservoir fixe et des tuyaux mobiles; μ l'angle de chaque conduit NG avec l'horizon. On aura ces différentes équations (426, 427, 224):

$$\text{I. } r = \left[h + f\left(\frac{b^2 - c^2}{b^2}\right) \right] \times \frac{M^2}{M^2 - K^2}.$$

$$\text{II. } l = \frac{rK^2}{M^2} + \frac{fc^2}{b^2}. \text{ III. Tang. } \mu = \frac{bK\sqrt{r}}{cM\sqrt{f}}.$$

$$\text{IV. } Q = 2K\sqrt{15r}. \text{ V. } Q = 2G\sqrt{15l}.$$

$$\text{VI. } H = h + l.$$

Faisons, pour abréger un peu, $1 - \frac{c^2}{b^2} = n$.

En donnant une autre forme à l'équation II, on trouvera $\frac{M^2}{M^2 - K^2} = \frac{r}{r - l + f - nf}$.

Substituant cette valeur dans l'équation I, on aura $r - l + f - nf = h + nf$; ou (à cause de $H = h + l$), $r = H - f + 2nf$. Mettons cette valeur de r dans l'équation (A), et nous aurons

$$\text{(B) } \Pi\sqrt{k} = \frac{Q}{\sqrt{15}}\left[\sqrt{(Hf - f^2 + 2nf^2)} - nf\right].$$

Maintenant, pour obtenir le *maximum* cherché, il faut différencier cette équation, en ne faisant varier que f, et égaler la différencielle à zéro. Par-là, on trouvera, $\frac{\frac{1}{2}H - f(1-2n)}{\sqrt{[Hf - f^2(1-2n)]}} - n = 0$; ou $[\frac{1}{2}H - f(1-2n)]^2 = n^2[Hf - f^2(1-2n)]$. Or, il est aisé de voir que tous les termes de cette équation se détruisent mutuellement en faisant $H = 2f - 2nf$. Ainsi, $f = \frac{H}{2(1-n)}$; et, à cause de $r = H - f + 2nf$, on aura aussi, $r = \frac{H}{2(1-n)}$. D'où il suit que la vitesse de rotation uniforme de la machine, et celle avec laquelle l'eau s'échappe continuellement par les orifices a, b, c, etc., sont égales entr'elles; et que la hauteur dûe à chacune de ces vitesses est $\frac{H}{2(1-n)}$. On voit de plus que ces deux vitesses étant contraires, la vitesse de l'eau immédiatement au sortir des orifices a, b, c, etc., est nulle dans l'espace absolu; et que par conséquent, l'eau tombe alors verticalement.

Substituons pour f cette même valeur $\frac{H}{2(1-n)}$ dans l'équation (B), et nous aurons pour l'expression du plus grand effet de la machine, $\Pi\sqrt{k} = \frac{Q \cdot H}{2\sqrt{15}}$.

435. *Corollaire I.* A mesure que le nombre n diminue, la hauteur f ou r diminue. Soit $n = 0$,

c'est-à-dire, $1 - \frac{c^2}{b^2} = 0$, ou $c = b$: la valeur de f ou de r sera $\frac{H}{2}$. Dans cette supposition, les droites Ah, Bl, (*Fig.* 68) sont égales, et on a la facilité de faire les ouvertures supérieures CD des tuyaux, plus grandes que les orifices l, comme cela doit être en effet (426).

436. *Corollaire II.* Si l'on met pour r et f leur valeur commune $\frac{H}{2(1-n)}$ dans les équations $Q = 2K\sqrt{15r}$, $\frac{M^2}{M^2 - K^2} = \frac{r}{r - l + f(1-n)}$, et qu'on dégage K et M, on trouvera $K = \frac{Q\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{30}.\sqrt{H}}$; $M = \frac{Q}{\sqrt{30}.\sqrt{(2l - H)}}$. Donc, $K : M :: \sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2l-H)} : \sqrt{H}$. Par où l'on voit que la hauteur l du vase immobile $IMIM$ (*Fig.* 67) ne peut pas être moindre que la moitié de H.

Si l'on faisoit $2l = H$, l'orifice K seroit infiniment petit; ce qui ne peut pas avoir lieu à la rigueur. Soit donc $l = \theta H$, θ étant une fraction moindre que l'unité : on aura, $K : M :: \sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2\theta - 1)} : 1$. Sur quoi il faut se souvenir que la fraction θ doit toujours avoir une valeur, telle que K soit sensiblement moindre que M.

Maintenant, l'équation III donne tang. $\mu = \frac{b\sqrt{(1-n)}.\sqrt{(2\theta-1)}}{c}$; l'équation V donne $G =$

$\frac{Q}{2\sqrt{15}.\sqrt{\theta H}}$; et enfin l'équation VI donne $h = H(1 - \theta)$.

Ainsi, on a tous les élémens nécessaires pour construire la machine, en observant, 1°. que les largeurs Bl, Ah (*Fig.* 68) doivent être telles qu'on puisse donner à M et à K les dimensions convenables, lesquelles sont subordonnées à la hauteur H de la machine, et à la quantité d'eau Q qui doit être employée à la mouvoir; 2°. que la différence des rayons AC, AD, ne soit pas fort grande, afin que la différence des forces centrifuges des particules d'eau, sur la largeur des tuyaux mobiles, ne change pas sensiblement les résultats précédens, où l'on a fait répondre toutes les forces centrifuges à la courbe moyenne hMl; 3°. que la somme des orifices G soit sensiblement moindre que la somme des orifices M, parce qu'on a supposé dans le calcul que le mouvement de l'eau, dans chaque tuyau $CDFE$, commençoit en CD.

437. *Scholie.* En comparant le plus grand effet de ces sortes de roues (434) au plus grand effet des roues à pots (417), on voit que si la hauteur OZ (H) de la roue mue par la réaction de l'eau (*Fig.* 67), est égale à la hauteur FV de l'eau, qui agit sur la roue à pots (*Fig.* 65), on voit, dis-je, que ces deux effets seront égaux pour une même quantité d'eau Q dépensée. Mais comme les roues mues par la réaction de l'eau, demandent à être exécutées avec beaucoup de précision dans toutes leurs par-

ties, pour bien produire leur effet; et que d'ailleurs, tout le poids de l'eau contenue à chaque instant dans les tuyaux mobiles, porte sur la tête du tourillon inférieur adapté à l'arbre, ce qui occasionne un frottement de même nature que celui d'un plan mobile circulairement sur un autre plan : on trouve qu'en mêmes circonstances les roues à pots doivent être préférées. Mais, il y a des cas où les roues mues par la réaction de l'eau, pourroient être substituées avec avantage aux roues mues par le choc de l'eau.

CHAPITRE XIX.

Théorie du mouvement de l'eau dans les tuyaux de pompe.

438. Nous avons expliqué (*Hydrostatique, Chap. VII et VIII*) le mécanisme des pompes; et nous avons en même temps déterminé la position et la hauteur de l'espace où le piston doit jouer, afin que la pression de l'atmosphère, mise en activité, obtienne son effet. Il s'agit maintenant de suivre le mouvement de l'eau dans les tuyaux de pompe. Ce problême important a fourni le sujet de plusieurs Écrits. Il a même fait naître, entre quelques Auteurs, des discussions sur le choix des principes qu'il convient d'employer pour le résoudre : car le grand nombre d'élémens qu'il renferme, l'impossi-

bilité de les soumettre tous à un calcul rigoureux, et l'influence plus ou moins grande que chacun d'eux peut avoir sur le résultat, laissent aux Géomètres la liberté d'adopter les hypothèses qui leur paroissent les plus propres à représenter les principaux mouvemens de ces machines. Ici je me contenterai d'exposer ma méthode, sans prétendre exclure aucune autre manière d'envisager la question. Je ne considérerai même que la simple pompe aspirante; mais ce que j'en dirai s'appliquera facilement aux autres espèces de pompes.

439. Reprenons d'abord, pour un moment, la *Figure* 37 de l'Hydrostatique, laquelle représente une pompe aspirante ordinaire. La pression de l'atmosphère, sur la surface *MN* du réservoir, oblige l'eau à monter par le tuyau d'aspiration et à suivre le piston, quand il s'élève de *GH* en *KI*. Si la vitesse du piston est plus grande que celle de l'eau subséquente, il se fera un vide entre le piston et l'eau; si au contraire la vitesse du piston est moindre que celle de l'eau, cette eau poussera le piston de bas en haut, et cette pression ne cessera que dans le cas où les deux vîtesses deviendront égales. Or, 1°. Lorsqu'il se forme un vide entre l'eau et le piston, le temps employé à parcourir la hauteur de ce vide est perdu quant à l'effet de la machine; 2°. lorsque la vitesse de l'eau, à l'endroit *KI* où répond la limite supérieure de la course du piston, est plus grande que celle du piston arrivé à cette limite, le piston venant à descendre repousse l'eau,

au moins sur l'étendue de la couronne qui environne le trou de la soupape mobile; ce qui occasionne de même une perte de forces. De là il suit que les dimensions de la pompe, la vitesse du piston et celle de l'eau doivent être tellement réglées que ces deux inconvéniens soient sauvés, du moins autant qu'il est possible.

440. Problème I *Déterminer la vitesse avec laquelle l'eau s'élève librement dans le corps de pompe, quand on y a fait le vide; c'est à-dire, dans l'hypothèse où la vitesse du piston est plus grande que celle de l'eau subséquente dans le vide?*

La pression de l'atmosphère sur la surface du réservoir d'où l'eau est élevée, peut être regardée comme le poids d'une colonne d'eau de trente-deux pieds de hauteur; je néglige le poids de la soupape dormante E, ou je le déduis de celui de la colonne de pression. Alors le problème proposé est le même que s'il s'agissoit de déterminer la vitesse avec laquelle l'eau s'élève dans un cylindre qui y est plongé verticalement à une profondeur donnée, et qui étant ouvert par en haut, est fermé vers le bas par une cloison où il y a une ouverture qui laisse entrer l'eau dans le cylindre.

Soit donc en général un vase $VMNT$ (*Fig* 69), percé à l'endroit MN d'une ouverture pq, et plongé verticalement dans le fluide $BKDF$ qui y entre par l'orifice pq. Je prends pour principe, ou pour hypothèse, qu'à l'instant où l'on ouvre l'orifice pq,

les deux portions de fluide $ABPM$, $CFQN$; agissent sur le fluide inférieur $PKDQ$, comme feroient deux pistons qui seroient appliqués sur les ouvertures PM, QN d'un vase $PKDQ$, et qui tendroient à faire sortir le fluide par l'orifice pq. En conséquence de ces pressions, le fluide s'élève dans le vase $VMNT$, sans cesser de former un même tout avec le reste de la masse. La portion inférieure d'eau $PKDQ$ peut être regardée comme stagnante, et comme servant simplement de véhicule à l'effort des pressions sur PM et QN, pour faire monter l'eau dans le vase $VMNT$. Je ne considère donc que deux mouvemens dans le fluide, l'un descensionnel dans les parties $ABPM$, $CFQN$; l'autre ascensionnel dans la partie $MNIG$; et je vais chercher une équation qui exprime les conditions de l'équilibre, entre les mouvemens perdus et les mouvemens gagnés.

Imaginons que le fluide extérieur $ABPM + NCFQ$, et le fluide intérieur $GMNI$, soient partagés chacun en une infinité de tranches horizontales égales, représentées par $Hufh + Xzcx$, et par $OLlo$; et supposons que toutes ces tranches, descendantes ou ascendantes, conservent leur parallélisme.

Soient
- la gravité .... $= g$,
- la verticale Sp .... $= p$,
- Rp .... $= z$,
- Ep .... $= q$,
- Yp .... $= x$,
- l'aire exprimée par la ligne GI. $= M$,

Soient
- l'aire exprimée par OL....... $= y$,
- l'aire de l'orifice pq.......... $= K$,
- l'aire exprimée par $BA + CF$.. $= P$,
- l'aire exprimée par $PM + NQ$. $= Q$,
- l'aire exprimée par $Hu + zX$... $= s$,
- la vîtesse de OL............... $= v$,
- la vîtesse à l'orifice pq...... $= u$,
- la vîtesse de la section $Hu + zX$. $= V$,
- l'élément du temps............ $= dt$,
- la hauteur dûe à la vîtesse u..... $= r$.

Il est clair que le fluide descendant, animé dans chacune de ses tranches, de la vîtesse $gdt - dV$, doit faire équilibre à chaque instant au fluide intérieur et ascendant, animé dans chacune de ses tranches, de la vîtesse $gdt + dv$. On aura donc l'équation

$$\int dz\,(gdt - dV) = \int dx\,(gdt + dv),$$

ou bien

$$\text{(A)}\quad \int dz\,(gdt - dV) - \int dx\,(gdt + dv) = 0.$$

$$\text{Or } v = \frac{Ku}{y},\quad dv = \frac{K(ydu - udy)}{yy},$$

$$V = \frac{Ku}{s},\quad dV = \frac{K(sdu - uds)}{ss},$$

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{dz}{V} = \frac{ydx}{Ku} = \frac{sdz}{Ku}.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$\frac{gsdz}{Ku}\int dz - K\,du\int\frac{dz}{s} + Kusdz \int\frac{ds}{s^2} - \frac{gydx}{Ku}\int dx - Kdu\int\frac{dx}{y} + Kuydx\int\frac{dy}{y^2} = 0.$$

Les intégrations indiquées doivent être effectuées pour les hauteurs entières p et q. Ainsi $\int dz = p$, $\int dx = q$. Soient pour les mêmes hauteurs, $\int \frac{dx}{y} = N$, $\int \frac{dz}{s} = N'$. De plus remarquons que l'intégrale $\int \frac{dy}{y^3}$ doit s'évanouir lorsque $y = M$, et recevoir sa valeur complette lorsque $y = K$; que pareillement l'intégrale $\int \frac{ds}{s^3}$ doit s'évanouir lorsque $s = P$, et recevoir sa valeur complette, lorsque $s = Q$. Remarquons encore que $E \cdot e\,(dq)$ étant la hauteur de la tranche $GIig$, on a $y\,dx = s\,dz = M\,dq$. Sur toutes ces considérations, notre équation deviendra

$$\text{(B)} \quad \frac{M\,(p-q)\,dq}{K} - K\,(N+N')\,dr + M \,.\, K \,.\, r\,dq \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right) = 0.$$

Il y a dans cette équation trois indéterminées, savoir, p, q, r; mais comme on a évidemment $M\,dq = -P\,dp$, et que les figures des vases sont données, il est clair qu'on aura p en q. Ainsi l'équation (B) se changera en une autre, où il n'y aura plus de variables que r et q et leurs différences, et d'où l'on tirera par conséquent la valeur de r en q, ou de q en r.

441. *Corollaire I.* Supposons que $VMNT$ soit un cylindre vertical; et que $BKDF$ soit aussi un

vase prismatique, dans lequel la hauteur de l'eau demeure constante, ce qui est le cas de la nature, puisque la pression de l'atmosphère, sur la surface du réservoir, est toujours sensiblement la même. Alors, dans l'équation (B), les quantités M et p sont constantes; $N = \frac{q}{M}$; $N' = \frac{p}{P}$; le terme $M.K.rdq\left(\frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2}\right)$ est zéro; et par conséquent on aura:

$$(C)\ \frac{M(p-q)\,dq}{K} - \frac{K.q\,dr}{M} - \frac{K\,p\,dr}{P} + M.K.r\,dq\left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{K^2}\right) = 0.$$

Equation qui étant de la même nature que celle de l'article 252, s'intègre de même.

442. *Corollaire II.* Si dans cette équation (C), l'orifice K est sensiblement moindre que M et P, on aura à-peu-près, $r = p - q$. Ainsi l'expression de la vîtesse du fluide à son passage par l'orifice pq est $\sqrt{[2g(p-q)]}$, et l'expression de sa vîtesse en GI est $\frac{K}{M}\sqrt{[2g(p-q)]}$.

On doit se souvenir que par K il faut toujours entendre l'orifice diminué, dans le rapport que demande la contraction de la veine fluide (213).

443. *Scholie.* Si dans le problême précédent, au lieu de supposer que l'écoulement se fait du vase $BKDF$ dans le vase $VMNT$, on suppose au contraire, que le vase $VMNT$ contienne de l'eau au-

dessus du niveau BF et se vide dans le vase $BKDF$: la question ne changera point de nature. Mais au lieu de l'équation (A), on aura l'équation :

(D) $\int dx(gdt - dv) - \int dz(gdt + dV) = 0$:

Sur laquelle on fera des remarques et des opérations analogues à celles qu'on a faites sur l'équation (A). On voit qu'ici p sera $< q$, au lieu qu'auparavant p étoit $> q$.

444. Problême II. *Soit* VZYT (Fig. 70) *un tuyau de pompe aspirante, dont le piston monte de* GH *en* KI *avec une vîtesse moindre que ne seroit celle de l'eau qui le suit, si elle montoit librement : on demande la pression que cette eau exercera de bas en haut contre la tête du piston, dans l'hypothèse où l'ouverture* p q *de la soupape dormante* E *est sensiblement moindre que la section horizontale* M N *du corps de pompe?*

Soient OL une position indéterminée du piston; ZY, la surface du réservoir dans lequel la pompe est plongée; AZ, la hautenr constante de la colonne d'eau dont la pression est équivalente à celle de l'atmosphère sur ZY. Supposons, comme ci-devant, la gravité $= g$; l'aire de la section $MN = M$; l'aire de l'orifice $pq = K$. Supposons de plus, $AK = c$; $AG = f$; $AO = x$; la hauteur dûe à la vîtesse ascensionnelle du piston $= r$.

Maintenant, si le piston n'opposoit point de résistance à l'ascension de l'eau qui le suit, la hauteur dûe à la vîtesse de l'eau en pq seroit x (442); et

par conséquent la hauteur dûe à la vîtesse de la tranche d'eau OL seroit $\frac{K^2 x}{M^2}$, les vîtesses des tranches de l'eau étant en raison inverse de leurs largeurs. Donc, puisque l'eau en OL, est obligée de prendre la vîtesse du piston, c'est-à-dire, une vîtesse dûe à la hauteur r; et que d'un autre côté la pression de l'eau contre chaque point de la tête du piston est évidemment égale au produit de la gravité par la différence des hauteurs $\frac{K^2 x}{M^2}$, r: il s'ensuit que les pressions contre la tête entière du piston, en OL, en GH, en KI, seront respectivement, $g\left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right) \times M$, $g\left(\frac{K^2 f}{M^2} - r\right) \times M$, $g\left(\frac{K^2 c}{M^2} - r\right) \times M$.

445. *Corollaire.* Si l'on veut que la pression en KI s'évanouisse, on aura $g\left(\frac{K^2 c}{M^2} - r\right) \times M = 0$, ou $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r}{c}$; et si l'on veut que la pression en KI soit égale à une quantité donnée ghM, on aura $\frac{K^2}{M^2} = \frac{r+h}{c}$.

446. Problême III. *Tout étant d'ailleurs le même que dans le problême précédent, on suppose que la colonne d'eau* VOLT *que le piston soulève, se dégorge continuellement par en haut à l'endroit fixe* VT, *et on demande une équation qui ex-*

prime les conditions du mouvement ascensionnel du piston ?

Supposons qu'outre la pression de l'eau qui pousse le piston de bas en haut, on lui applique encore dans le même sens une force que je représente par le poids d'une colonne d'eau dont la base $= M$, et la hauteur $= z$. Le piston sera poussé de bas en haut par une force $= gMz + gM \left(\frac{K^2 x}{M^2} - r\right)$; mais il sera repoussé de haut en bas : 1°. par son propre poids que je représente par celui d'une colonne d'eau dont la base $= M$, et la hauteur donnée $= a$; 2°. par le poids de la colonne d'eau $OLTV$, lequel $= gM(x + k)$, en nommant k la hauteur donnée VA; 3°. par la pression de l'atmosphère sur la surface VT, laquelle pression $= gM.H$, en nommant H la hauteur donnée AZ. Ainsi, la force absolue qui fait monter le piston est simplement, $gMz + gM \left(\frac{k^2 x}{M^2} - r\right) - gMa - gM(x + k) - gM.H$. Or, cette force meut la masse $Ma + M(x + k)$; donc, par la formule $m v dv = F ds$ des forces accélératrices, on aura

$$(a + x + k)\, dr = - dx \left(z + \frac{K^2 x}{M^2} - r - a - x - k - H\right).$$

Cette équation contient trois variables, r, x, z : connoissant donc l'une de ces variables, ou la relation de deux d'entr'elles, on connoîtra la relation des trois.

447. *Corollaire.* Supposons que le piston monte uniformément : on aura $dr = 0$, et notre équation donnera, $z = H + k + a + r + \frac{x(M^2 - K^2)}{M^2}$.

Supposons de plus que la vitesse du piston soit telle, que la pression de l'eau s'évanouisse quand il arrive en KI : on aura (445), $r = \frac{K^2 c}{M^2}$. Donc $z = H + k + a + \frac{K^2 c + x(M^2 - K^2)}{M^2}$.

On voit que la hauteur z est variable. Faisant successivement $x = c$, $x = f$, et nommant Z, Z', les valeurs correspondantes de z, on aura

$$Z = H + k + a + c,$$

$$Z' = H + k + a + f - \frac{(f - c)K^2}{M^2}.$$

Dans la pratique, il faudra prendre la valeur de z, moyenne entre Z et Z'.

448. *Exemple.* Supposons AZ ou $H = 32$ pieds ; AV ou $k = 4$ pieds ; $a = 2$ pieds ; AO ou $c = 7$ pieds ; AG ou $f = 9$ pieds ; le diamètre du corps de pompe $= 6$ pouces ; celui de l'ouverture $pq = 2$ pouces $\frac{1}{2}$. On trouvera, $\frac{K}{M} = \frac{25}{144}$; $\frac{K^2}{M^2} = \frac{625}{20736}$; $r = 2$ pouces 6 lignes $\frac{1}{5}$; $Z = 45$ pieds ; $Z' = 46$ pieds 11 pouces 4 lignes. Or, 1°. la valeur de r donne, pour le piston, une vîtesse ascensionnelle uniforme, de 3 pieds 6 pouces $\frac{2}{5}$, par seconde : Ainsi le piston parcourra la hauteur GK de son jeu, qui est de 2 pieds, en trente-trois tierces

tierces $\frac{3}{4}$ à-peu-près; et durant ce même temps, il sortira par la bouche *V T*, un cylindre d'eau qui a 6 pouces de diamètre et 2 pieds de hauteur, ce qui donne 679 pouces cubes. Si donc l'on suppose que le piston emploie le même temps à descendre qu'à monter, on voit que dans une minute le piston montera 53 fois $\frac{1}{3}$, et que par conséquent il sortira par *VT*, 36213 $\frac{1}{3}$ pouces cubes d'eau; ce qui forme un poids d'environ 1467 livres, à raison de 70 livres le pied cube. Ce poids est élevé à la hauteur *Z V* qui est de 36 pieds; l'effet est donc le même que si un poids de 52812 livres étoit élevé à la hauteur d'un pied en une minute.

2°. En prenant 45 pieds 11 pouces 8 lignes pour la hauteur moyenne de la colonne d'eau dont le poids est équivalent à la force qui doit pousser le piston de bas en haut, on trouvera que cette colonne, qui est un cylindre de 6 pouces de diamètre sur 45 pieds 11 pouces 8 lignes de hauteur, forme un poids d'environ 632 livres; ce poids parcourt 53 $\frac{1}{3}$ fois 2 pieds, en une minute : résultat qui est le même que si un poids de 67412 livres étoit élevé à la hauteur de 1 pied en 1 minute. Ce poids comprend deux parties, l'une relative à l'élévation de l'eau, l'autre à l'élévation de la masse du piston. A quoi il faudra ajouter encore la force nécessaire pour vaincre le frottement.

S'il n'étoit question que de soutenir le piston dans le simple état d'équilibre, la hauteur de la colonne d'eau équivalente à l'effort nécessaire, au lieu d'être

de 45 pieds 11 pouces 8 lignes, seroit simplement de 38 pieds (79).

449. Problème IV. *Le piston ayant été élevé à sa plus grande hauteur* KI, *et venant ensuite à descendre, on demande la vîtesse avec laquelle il descendra ?*

Lorsque le piston commence à descendre, la soupape dormante *E* se ferme, et la soupape mobile *F* s'ouvre. Alors la colonne d'eau *VMNT* peut être considérée comme une eau dormante, dans laquelle le piston descend en vertu d'une force qui est égale à l'excès de son poids absolu sur le poids du fluide qu'il déplace, et sur la résistance qu'il éprouve en frappant l'eau sur toute l'étendue de la couronne qui environne l'ouverture de la soupape *F*. A quoi l'on peut ajouter une force extérieure, qui poussera encore le piston de haut en bas, si l'on veut accélérer sa vîtesse. Dans l'une et l'autre hypothèse, la recherche de cette vîtesse est un problême de même nature que celui de l'article 376. Nos lecteurs achèveront donc facilement la solution.

Comme la hauteur d'où tombe le piston n'est jamais fort grande, la résistance qu'il éprouve en frappant l'eau par sa vîtesse acquise, peut le plus souvent être négligée; et alors l'expression de la vîtesse est fort simple. D'un autre côté, en augmentant de plus en plus l'ouverture de la soupape, on fait encore diminuer la résistance; mais cela peut

avoir l'inconvénient de rendre la soupape peu fidèle, trop massive et trop lente au mouvement.

Fin du Tome premier.

ERRATA.

Page 11, lig. 6, d'équibre *lisez* d'équilibre
Page 147, lig. 12, $AE = a$ *lisez* $AE = x$
Page 301, *au commencement de la ligne* 12, *mettez* 233 *bis*.

Note sur la fin du n°. 376, p. 482.

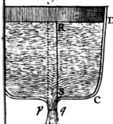
On suppose dans l'application de ce problême à l'hypothèse de Léibnitz, que chaque goutte de pluie ait un diamètre fini et sensible.

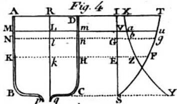
TABLE.

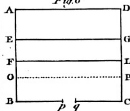
Fin de la Table.

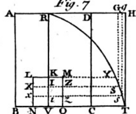
AVIS AU RELIEUR.

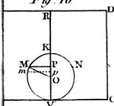
Placez à la page 274 les six Planches cotées *Hydrostatique*; et à la fin du volume les six Planches cotées *Hydraulique*; en observant de ne pas intervertir l'ordre numérique de ces Planches.

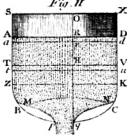

Fig. 3
D
R
S
C
p q

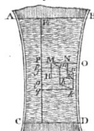

Fig. 4
A R D I X T
M L m V a u
N l n G b g
K k H E Z F
B p q C S Y

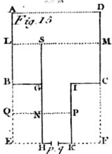

Fig. 6
A D
E G
F L
O P
B p q C


Fig. 7
A R D G g H
L K M X
X I Z S
x i z s
B N V O C T


Fig. 10
R D
K
M P N
m p
O
V C


Fig. 11
S O X
A R D
a d
T V
t u
Z K
M N
B C
p q


Fig. 14
A B
P M N O
H
C D


Fig. 15
A D
L S M
B G I C
Q N P
E H p q K F

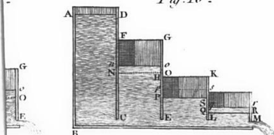


Fig. 18.

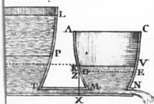


Fig. 21.

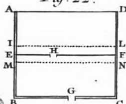


Fig. 22.

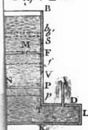


Fig. 25.

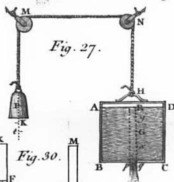


Fig. 27.

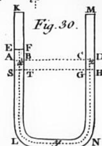


Fig. 30.

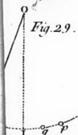


Fig. 29.

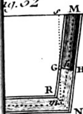
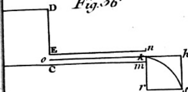
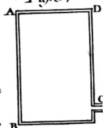
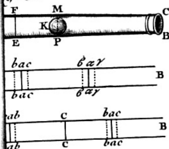
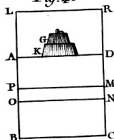

ig. 32
s
M
G
H
R
m
N

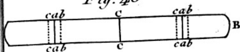

Fig. 33
A
C
E
F
B
D

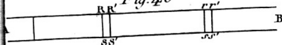

Fig. 36
D
E
n
o
k
h
C
m
r
s


Fig. 37
A
D
C
B


ig. 39
F
M
C
K
E
P
B
bac
βαγ
B
bac
βαγ
ab
C
bac
B
ab
C
bac


Fig. 40
L
R
G
K
A
D
P
M
O
N
B
C

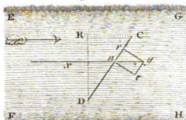

Fig. 45
cab
C
cab
B
cab
C
cab


Fig. 46
RR'
rr'
B
A
SS'
ss'

[Fig.] 48.



Fig. 49.



[Fi]g. 51.

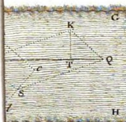
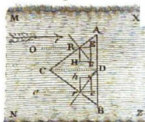


Fig. 52.



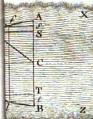
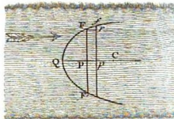
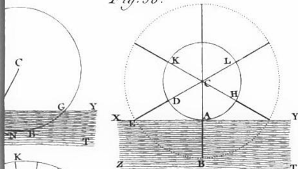
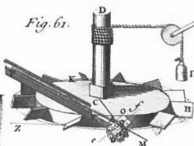


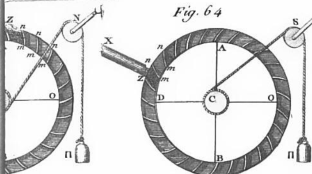
Fig. 55.



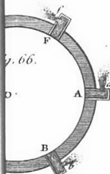
Picquet Sculp.

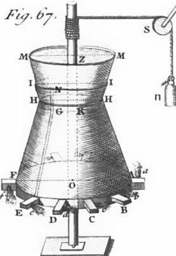

Fig. 58.
C
G
Y
N
T
K
L
C
H
D
A
X
E
Y
Z
B
T

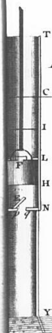

Fig. 61.
D
K
C
O
f
H
Z
M

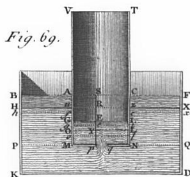

Z
N
O
Fig. 64
S
X
A
D
C
O
B

Picquet Sc.


Fig. 66.
F
A
B


Fig. 67.
S
M
M
Z
I
I
N
H
H
G
R
F
O
E
D
C
B


Fig. 70.
T
C
I
L
F
H
N
Y


Fig. 69.
V
T
B
A
S
C
F
H
R
X
P
M
N
Q
K
D



